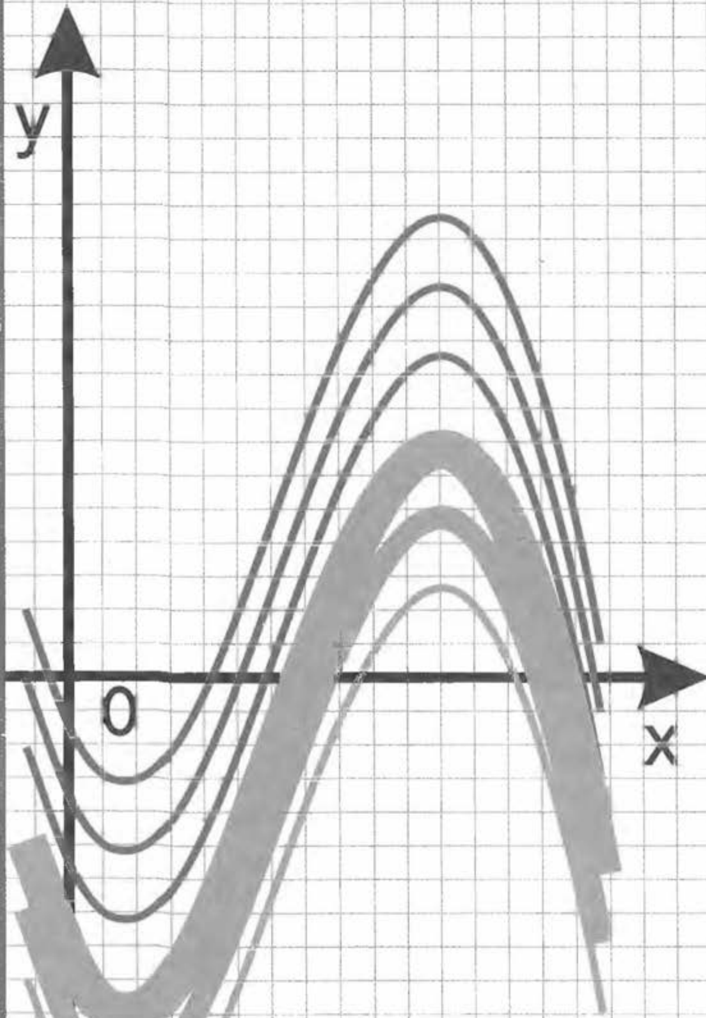
Тригонометрия



10

«ПРОСВЕЩЕНИЕ»

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151.0я72
Т67

Авторы:
Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова

Условные обозначения

Знаком ● отмечены упражнения, соответствующие уровню обязательной математической подготовки.

Светлым *курсивом* набраны номера упражнений, рекомендованных для домашней работы.

Знаком * отмечены более сложные упражнения.

Тригонометрия. 10 класс : учеб. пособие для общеобра-
Т67 зоват. учреждений / [Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова]; под ред. С. А. Теляковского.— 10-е изд.— М. : Просвещение, 2012.— 61 с. : ил.— ISBN 978-5-09-026767-0.

Данное учебное пособие соответствует главе V «Тригонометрические выражения и их преобразования» из учебника «Алгебра, 9» тех же авторов предыдущих годов издания.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151.0я72

ISBN 978-5-09-026767-0

§ 1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЛЮБОГО УГЛА

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА

Отметим на оси x справа от начала координат точку A и проведем через нее окружность с центром в точке O (рис. 1). Радиус OA будем называть *начальным радиусом.*

Повернем начальный радиус около точки O на $70°$ против часовой стрелки. При этом он перейдет в радиус OB. Говорят, что угол поворота равен $70°$. Если повернуть начальный радиус около точки O на $70°$ по часовой стрелке, то он перейдет в радиус OC. В этом случае говорят, что угол поворота равен $-70°$. Углы поворота в $70°$ и $-70°$ показаны стрелками на рисунке 64.

Вообще при повороте против часовой стрелки угол поворота считают *положительным*, а при повороте по часовой стрелке — *отрицательным.*

Из курса геометрии известно, что мера угла в градусах выражается числом от 0 до 180. Что касается угла поворота, то он может выражаться в градусах каким угодно действительным числом от $-\infty$ до $+\infty$. Так, если начальный радиус повернуть против часовой стрелки на $180°$, а потом еще на $30°$, то угол поворота будет равен $210°$. Если начальный радиус сделает полный оборот против часовой стрелки, то угол поворота будет равен $360°$; если он сделает полтора оборота в том же направлении, то угол поворота будет равен $540°$ и т. д. На рисунке 2 стрелками показаны углы поворота в $405°$ и $-200°$.

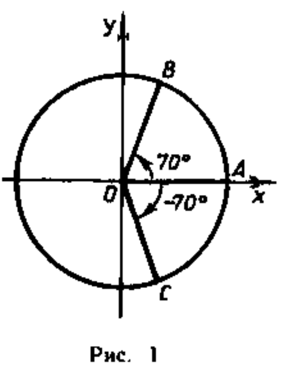


Рис. 1

Рассмотрим радиусы OA и OB (рис. 3). Существует бесконечно много углов поворота, при которых начальный радиус OA переходит в радиус OB. Так, если $\angle AOB = 130°$, то соответствующие углы по-

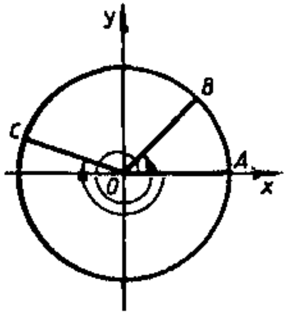


Рис. 2

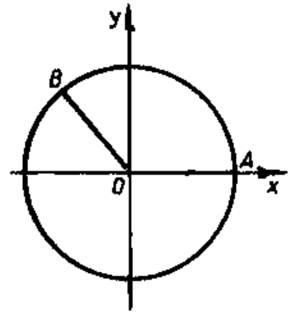


Рис. 3

ворота будут равны $130°+360°n$, где n — любое целое число. Например, при $n=0$, 1, -1, 2, -2 получаем углы поворота $130°$, $490°$, $-230°$, $850°$, $-590°$.

Пусть при повороте на угол α начальный радиус OA переходит в радиус OB. В зависимости от того, в какой координатной четверти окажется радиус OB, угол α называют углом этой четверти. Так, если $0°<\alpha<90°$, то α — угол I четверти; если $90°<\alpha<180°$, то α — угол II четверти; если $180°<\alpha<270°$, то α — угол III четверти; если $270°<\alpha<360°$, то α — угол IV четверти. Очевидно, что при прибавлении к углу целого числа оборотов получается угол той же четверти. Например, угол в $430°$ является углом I четверти, так как $430°=360°+70°$ и $0°<70°<90°$; угол в $920°$ является углом III четверти, так как $920°=360°\cdot2+200°$ и $180°<200°<270°$.

Углы $0°$, $\pm90°$, $\pm180°$, $\pm270°$, $\pm360°$, ... не относятся ни к какой четверти.

В курсе геометрии были определены *синус, косинус* и *тангенс* угла α при $0°\leqslant\alpha\leqslant180°$. Теперь мы распространим эти определения на случай произвольного угла α. Кроме того, определим еще *котангенс* угла α, который обозначают $\operatorname{ctg}\alpha$.

Пусть при повороте около точки *O* на угол α начальный радиус *OA* переходит в радиус *OB* (рис. 4).

Синусом угла α называется отношение ординаты точки *B* к длине радиуса.

Косинусом угла α называется отношение абсциссы точки *B* к длине радиуса.

Тангенсом угла α называется отношение ординаты точки *B* к ее абсциссе.

Котангенсом угла α называется отношение абсциссы точки *B* к ее ординате.

Если координаты точки B равны x и y, а длина начального радиуса равна R, то

$$\sin\alpha=\frac{y}{R},\ \cos\alpha=\frac{x}{R},\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x},\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}.$$

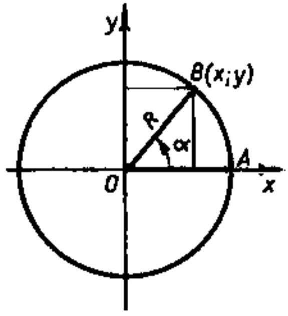


Рис. 4

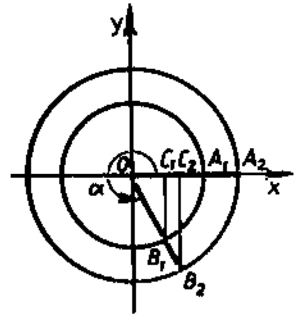


Рис. 5

В курсе геометрии было показано, что значения синуса, косинуса и тангенса угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, зависят только от α и не зависят от длины радиуса R. И в общем случае $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, а также $\operatorname{ctg} \alpha$ зависят только от угла α.

Покажем, например, что $\sin \alpha$ не зависит от R.

Пусть при повороте луча OA_1 около точки O на угол α (рис. 5) радиусы $OA_1 = R_1$ и $OA_2 = R_2$ займут положения OB_1 и OB_2. Обозначим координаты точки B_1 через x_1 и y_1, а координаты точки B_2 через x_2 и y_2.

Опустим перпендикуляры из точек B_1 и B_2 на ось x. Прямоугольные треугольники OB_1C_1 и OB_2C_2 подобны. Отсюда

$$\frac{B_1C_1}{OB_1} = \frac{B_2C_2}{OB_2}, \text{ т. е. } \frac{|y_1|}{R_1} = \frac{|y_2|}{R_2}.$$

Так как точки B_1 и B_2 принадлежат одной и той же координатной четверти, то их ординаты y_1 и y_2 имеют одинаковые знаки. Поэтому $\frac{y_1}{R_1} = \frac{y_2}{R_2}$.

Заметим, что это равенство верно и в том случае, когда точки B_1 и B_2 попадают на одну из осей координат. Таким образом, для любого угла α отношение $\frac{y}{R}$ не зависит от длины радиуса R.

Выражения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ определены при любом α, так как для любого угла поворота можно найти соответствующие значения дробей $\frac{y}{R}$ и $\frac{x}{R}$. Выражение $\operatorname{tg} \alpha$ имеет смысл при любом α, кроме углов поворота $\pm 90°$, $\pm 270°$, $\pm 450°$, ..., так как для этих углов не имеет смысла дробь $\frac{y}{x}$. Для выражения $\operatorname{ctg} \alpha$ исключаются углы $0°$, $\pm 180°$, $\pm 360°$, ..., для которых не имеет смысла дробь $\frac{x}{y}$.

Каждому допустимому значению α соответствует единственное значение $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$. Поэтому синус, косинус, тангенс и котангенс являются функциями угла α. Их называют *тригонометрическими функциями.*

Можно доказать, что областью значений синуса и косинуса является промежуток $[-1; 1]$, а областью значений тангенса и котангенса — множество всех действительных чисел.

Приведем примеры вычисления значений тригонометрических функций.

Пример 1. Найдем с помощью чертежа приближенные значения $\sin 110°$, $\cos 110°$, $\operatorname{tg} 110°$ и $\operatorname{ctg} 110°$.

Начертим окружность с центром в начале координат и радиусом $OA=R=3$ (рис. 6). Повернем радиус OA на $110°$. Получим радиус OB. Найдем по рисунку координаты x и y точки B: $x\approx -1{,}05$, $y\approx 2{,}80$. Отсюда

$$\sin 110° = \frac{y}{R} \approx \frac{2{,}80}{3} \approx 0{,}93,$$

$$\cos 110° = \frac{x}{R} \approx -\frac{1{,}05}{3} = -0{,}35,$$

$$\operatorname{tg} 110° = \frac{y}{x} \approx -\frac{2{,}80}{1{,}05} \approx -2{,}7,$$

$$\operatorname{ctg} 110° = \frac{x}{y} \approx -\frac{1{,}05}{2{,}80} \approx -0{,}38.$$

В таблице приведены известные из курса геометрии значения синуса, косинуса и тангенса углов 0°, 30°, 45°, 60° и 90°. Прочерк сделан в том случае, когда выражение не имеет смысла.

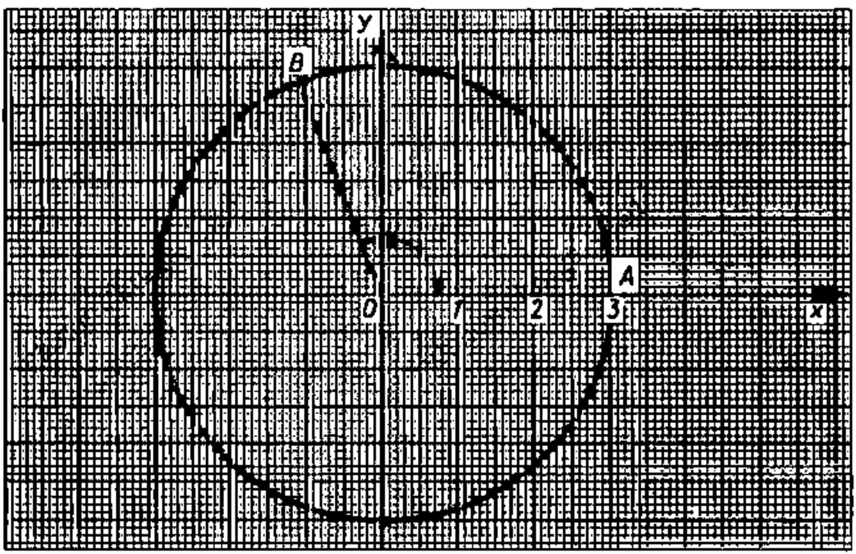


Рис. 6

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Значения котангенса могут быть получены из значений тангенса, так как котангенс угла является числом, обратным тангенсу этого же угла. Поэтому, например,

$$\operatorname{ctg} 30° = \frac{1}{\operatorname{tg} 30°} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}.$$

Пример 2. Найдем синус, косинус, тангенс и котангенс углов 180° и 270°.

При повороте на 180° около точки O радиус OA, равный 1 (рис. 7), переходит в радиус OB, а при повороте на 270° — в радиус OC.

Так как точка B имеет координаты $x = -1$ и $y = 0$, то

$$\sin 180° = \frac{0}{1} = 0,$$

$$\cos 180° = \frac{-1}{1} = -1,$$

$$\operatorname{tg} 180° = \frac{0}{-1} = 0.$$

Так как точка C имеет координаты $x = 0$ и $y = -1$, то

$$\sin 270° = \frac{-1}{1} = -1, \qquad \cos 270° = \frac{0}{1} = 0,$$

$$\operatorname{ctg} 270° = \frac{0}{-1} = 0.$$

Напомним, что выражения $\operatorname{ctg} 180°$ и $\operatorname{tg} 270°$ не имеют смысла.

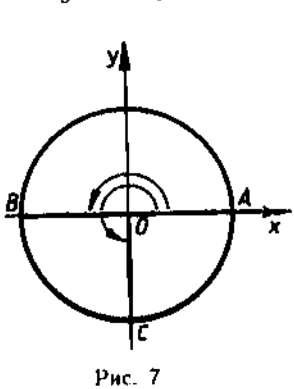


Рис. 7

1. Начертите окружность с центром в начале координат и изобразите угол поворота, равный 150°, 210°, 540°, −45°, −135°, −720°.

2. Чему равны углы поворота, показанные стрелками на рисунке 8?

3. В какой четверти угол α, если:

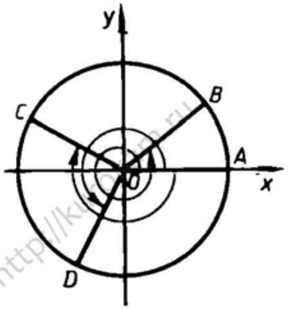


Рис. 8

а) $\alpha=283°$; г) $\alpha=-20°$;
б) $\alpha=190°$; д) $\alpha=-110°$;
в) $\alpha=100°$; е) $\alpha=4200°$?

4. В какой четверти угол α, если:

а) $\alpha=179°$; г) $\alpha=-10°$;
б) $\alpha=325°$; д) $\alpha=800°$;
в) $\alpha=-150°$; е) $\alpha=10\,000°$.

5. Среди углов поворота 770°, 480°, −50°, 1560°, −240°, −310° найдите такие, при которых начальный радиус займет то же положение, что и при повороте на угол: а) $\alpha=50°$; б) $\alpha=120°$.

6. Найдите в промежутке от 0° до 360° угол α такой, чтобы поворот начального радиуса на этот угол совпал с поворотом на угол:
а) 420°; б) −210°; в) −700°.

7. На рисунке 9 стрелками показаны углы поворота в 35°, 160°, 230° и −75°. Найдите приближенное значение синуса, косинуса, тангенса и котангенса каждого из этих углов.

8. Начертите окружность с центром в начале координат и радиусом $R=5$ см. Поверните начальный радиус на угол α и найдите приближенное значение $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\alpha=50°$, 175°, −100°.

● **9.** Найдите значение выражения:

а) $2\cos 60°+\sqrt{3}\cos 30°$; г) $3\operatorname{tg} 45°\cdot\operatorname{tg} 60°$;
б) $5\sin 30°-\operatorname{ctg} 45°$; д) $4\operatorname{tg} 60°\cdot\sin 60°$;
в) $2\sin 30°+6\cos 60°-4\operatorname{tg} 45°$; е) $12\sin 60°\cdot\cos 60°$.

● *10.* Вычислите:

а) $2\sin 60°\cdot\operatorname{ctg} 60°$; в) $7\operatorname{tg} 30°\cdot\operatorname{ctg} 30°$;
б) $2\sin 45°-4\cos 30°$; г) $6\operatorname{ctg} 60°-2\sin 60°$.

11. Укажите несколько значений α, при которых:
а) $\sin\alpha=1$; б) $\cos\alpha=-1$; в) $\sin\alpha=0$; г) $\operatorname{tg}\alpha=0$.

12. Укажите несколько значений β, при которых:
а) $\sin\beta=-1$; б) $\cos\beta=1$; в) $\cos\beta=0$; г) $\operatorname{ctg}\beta=0$.

КЛАВДИЙ ПТОЛЕМЕЙ (II в.) — древнегреческий ученый, создатель геоцентрической системы мира. Разработал математическую теорию движения планет, позволяющую вычислять их положение на небесной сфере. Внес значительный вклад в развитие тригонометрии.

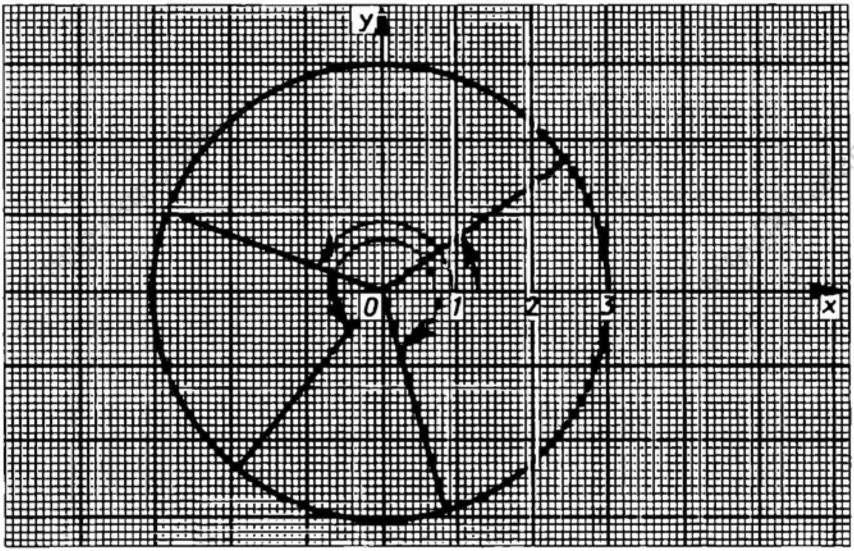


Рис. 9

13. Каковы наибольшее и наименьшее значения выражения:
а) $1+\sin\alpha$; б) $2-\cos\alpha$?

14. Укажите наибольшее и наименьшее значения выражения:
а) $1-\sin\alpha$; б) $2+\cos\alpha$.

15. Укажите несколько углов α, при которых не имеет смысла выражение:
а) $\operatorname{tg}\alpha$; б) $\operatorname{ctg}\alpha$.

16. Может ли $\sin\alpha$ принимать значение, равное:
а) $\sqrt{2}$; б) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; в) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$?

● **17.** Найдите значение выражения:
а) $2\cos 0^\circ-4\sin 90^\circ+5\operatorname{tg}180^\circ$;
б) $2\operatorname{ctg}90^\circ-3\cos 270^\circ+5\sin 0^\circ$;
в) $\operatorname{tg}360^\circ-\frac{3}{4}\sin 270^\circ-\frac{1}{4}\cos 180^\circ$.

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР (1707—1783) — математик, механик, физик, астроном. По происхождению швейцарец. Более тридцати лет работал в России. Член Петербургской Академии наук. Ученый необычайной широты интересов. Его многочисленные труды по математике, небесной механике, физике, кораблестроению оказали значительное влияние на развитие науки.

● *18.* Вычислите:

а) $\sin 0^\circ + 2\cos 60^\circ$; в) $4\sin 90^\circ - 3\cos 180^\circ$;
б) $\operatorname{tg} 60^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ$; г) $3\operatorname{ctg} 90^\circ - 3\sin 270^\circ$.

● **19.** Найдите значение выражения $\sin\alpha + \cos\alpha$, если:

а) $\alpha = 0^\circ$; б) $\alpha = 45^\circ$; в) $\alpha = 90^\circ$; г) $\alpha = 180^\circ$.

● **20.** Найдите значение выражения $\cos 2\alpha + \cos 3\alpha$, если:

а) $\alpha = 15^\circ$; б) $\alpha = 30^\circ$; в) $\alpha = 90^\circ$.

● *21.* Найдите значение выражения:

а) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$ при $\alpha = 30^\circ$;
б) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}$ при $\alpha = 90^\circ$.

Упражнения для повторения

22. Упростите выражение

$$\frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{\sqrt{a}} : \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right).$$

23. Докажите, что:

а) прямая $2x - 3y = 2$ пересекает окружность $x^2 + y^2 = 20$;
б) прямая $x + 7y = 50$ касается окружности $x^2 + y^2 = 50$.

24. Найдите значение выражения:

а) $\frac{6^{-3}}{8^{-1} \cdot 3^{4}}$; б) $\frac{12^{-1} \cdot 5}{3^{-1} \cdot 2^{-4}}$.

2. СВОЙСТВА СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА

Рассмотрим некоторые свойства тригонометрических функций.

Выясним сначала, какие знаки имеют синус, косинус, тангенс и котангенс в каждой из координатных четвертей.

Пусть при повороте радиуса OA, равного R, на угол α точка A перешла в точку B с координатами x и y (см. рис. 4).

Так как $\sin\alpha = \frac{y}{R}$, то знак $\sin\alpha$ зависит от знака y. В I и II четвертях $y > 0$, а в III и IV четвертях $y < 0$. Значит, $\sin\alpha > 0$, ***если α является углом*** I ***или*** II ***четверти, и*** $\sin\alpha < 0$, ***если α является углом*** III ***или*** IV ***четверти.***

Знак $\cos\alpha$ зависит от знака x, так как $\cos\alpha = \frac{x}{R}$. В I и IV четвертях $x > 0$, а во II и III четвертях $x < 0$. Поэтому

Рис. 10

$\cos\alpha > 0$, ***если α является углом I или IV четверти, и*** $\cos\alpha < 0$, ***если α является углом II или III четверти.***

Так как $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, а $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$, то знаки $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ зависят от знаков x и y. В I и III четвертях x и y имеют одинаковые знаки, а во II и IV — разные. Значит, $\operatorname{tg}\alpha > 0$ ***и*** $\operatorname{ctg}\alpha > 0$, ***если α является углом I или III четверти;*** $\operatorname{tg}\alpha < 0$ **и** $\operatorname{ctg}\alpha < 0$, ***если α является углом II или IV четверти.***

Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса в каждой из четвертей показаны на рисунке 10.

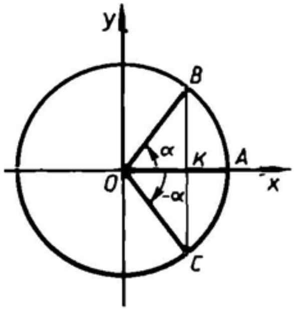


Рис. 11

Выясним теперь вопрос о четности и нечетности тригонометрических функций.

Пусть при повороте на угол α радиус OA переходит в радиус OB, а при повороте на угол $-\alpha$ в радиус OC (рис. 11). Соединив отрезком точки B и C, получим равнобедренный треугольник BOC. Луч OA является биссектрисой угла BOC. Значит, отрезок OK является медианой и высотой треугольника BOC. Отсюда следует, что точки B и C симметричны относительно оси абсцисс.

Пусть координаты точки B равны x и y, тогда координаты точки C равны x и $-y$. Пользуясь этим, найдем, что

$$\sin(-\alpha) = \frac{-y}{R} = -\frac{y}{R} = -\sin\alpha,$$

$$\cos(-\alpha) = \frac{x}{R} = \cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Мы получили формулы, выражающие зависимость между синусами, косинусами, тангенсами и котангенсами противоположных углов:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Например:

$$\cos(-40^\circ) = \cos 40^\circ,$$
$$\operatorname{tg}(-60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}.$$

Итак, ***синус, тангенс и котангенс являются нечетными функциями, а косинус является четной функцией.***

Рассмотрим еще одно свойство тригонометрических функций.

Если при повороте радиуса OA на угол α получен радиус OB (см. рис. 4), то тот же радиус получится и при повороте OA на угол, отличающийся от α на целое число оборотов. Отсюда следует, что ***при изменении угла на целое число оборотов значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса не изменяются.***

Например:

$$\sin 30^\circ = \sin(30^\circ + 360^\circ) = \sin(30^\circ - 360^\circ) = \sin(30^\circ + 2\cdot 360^\circ) =$$
$$= \sin(30^\circ - 2\cdot 360^\circ) = \ldots = \frac{1}{2}.$$

Рассмотренные свойства позволяют свести нахождение значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса любого угла к нахождению их значений для неотрицательного угла, меньшего 360°.

Пример. Найдем $\sin 765^\circ$ и $\cos(-1170^\circ)$.

Имеем:

$$\sin 765^\circ = \sin(2\cdot 360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos(-1170^\circ) = \cos 1170^\circ = \cos(3\cdot 360^\circ + 90^\circ) = \cos 90^\circ = 0.$$

● **25.** Какой знак имеют $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если:

а) $\alpha = 48^\circ$; б) $\alpha = 137^\circ$; в) $\alpha = 200^\circ$; г) $\alpha = 306^\circ$?

● **26.** Какой знак имеет:

а) $\sin 179^\circ$; д) $\cos 410^\circ$;
б) $\cos 280^\circ$; е) $\operatorname{tg} 500^\circ$;
в) $\operatorname{tg} 175^\circ$; ж) $\sin(-75^\circ)$;
г) $\operatorname{ctg} 359^\circ$; з) $\cos(-116^\circ)$?

● *27.* Выясните, какой знак имеет:

а) $\cos 315^\circ$; в) $\operatorname{tg} 145^\circ$; д) $\cos(-25^\circ)$;
б) $\sin 109^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 288^\circ$; е) $\operatorname{tg}(-10^\circ)$.

28. Углом какой четверти является угол α, если:

а) $\sin\alpha>0$ и $\cos\alpha>0$; г) $\sin\alpha>0$ и $\operatorname{tg}\alpha>0$;

б) $\sin\alpha<0$ и $\cos\alpha>0$; д) $\operatorname{tg}\alpha<0$ и $\cos\alpha>0$;

в) $\sin\alpha<0$ и $\cos\alpha<0$; е) $\operatorname{ctg}\alpha>0$ и $\sin\alpha<0$?

29. Определите знак выражения:

а) $\sin 100°\cdot\cos 300°$; в) $\cos 320°\cdot\operatorname{ctg} 17°$;

б) $\sin 190°\cdot\operatorname{tg} 200°$; г) $\operatorname{tg} 170°\cdot\cos 400°$.

30. В каких четвертях имеют одинаковые знаки:

а) $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$; б) $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$; в) $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$?

● **31.** Найдите значение выражения:

а) $\sin(-30°)$; в) $\operatorname{tg}(-45°)$; д) $\cos(-90°)$;

б) $\cos(-60°)$; г) $\operatorname{ctg}(-30°)$; е) $\sin(-45°)$.

● *32.* Найдите:

а) $\sin(-60°)$; б) $\cos(-180°)$; в) $\sin(-90°)$; г) $\operatorname{ctg}(-45°)$.

● **33.** Найдите значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла α (если они существуют) при:

а) $\alpha=750°$; б) $\alpha=810°$; в) $\alpha=1260°$.

● **34.** Найдите:

а) $\sin 390°$; б) $\cos 420°$; в) $\operatorname{tg} 540°$; г) $\operatorname{ctg} 450°$.

● *35.* Найдите значение выражения:

а) $\sin 405°$; б) $\cos 720°$; в) $\operatorname{tg} 390°$; г) $\operatorname{ctg} 630°$.

● **36.** Вычислите:

а) $\sin(-720°)$; в) $\cos(-780°)$;

б) $\cos(-405°)$; г) $\operatorname{ctg}(-1110°)$.

● *37.* Найдите:

а) $\operatorname{tg}(-900°)$; б) $\operatorname{ctg}(-780°)$; в) $\sin(-1125°)$.

Упражнения для повторения

38. Найдите значение выражения

$$\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}-y^{-1}}\cdot\frac{x^2y^2}{x+y} \text{ при } x=-0{,}12 \text{ и } y=0{,}5.$$

39. Решите неравенство:

а) $x^2-x-56<0$; в) $4x^2\leqslant-1$;

б) $3x^2-29x-10>0$; г) $\frac{1}{4}-x+x^2>0$.

3. РАДИАННАЯ МЕРА УГЛА. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРА

Как известно, углы измеряются в градусах, минутах, секундах. Эти единицы измерения связаны между собой соотношениями

$$1^\circ = 60', \qquad 1' = 60'',$$
$$1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ, \qquad 1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'.$$

Кроме указанных, используется также единица измерения углов, называемая *радианом*.

Углом в один радиан называют центральный угол, которому соответствует длина дуги, равная длине радиуса окружности.

Угол, равный 1 рад, изображен на рисунке 12.

Радианная мера угла, т. е. величина угла, выраженная в радианах, не зависит от длины радиуса. Это следует из того, что фигуры, ограниченные углом и дугой окружности с центром в вершине этого угла, подобны между собой (рис. 13).

Установим связь между радианным и градусным измерениями углов.

Углу, равному 180°, соответствует полуокружность, т. е. дуга, длина l которой равна πR:

$$l = \pi R.$$

Чтобы найти радианную меру этого угла, надо длину дуги l разделить на длину радиуса R. Получим:

$$\frac{l}{R} = \pi.$$

Следовательно, радианная мера угла в 180° равна π:

$$180^\circ = \pi \text{ рад}.$$

Отсюда получаем, что радианная мера угла в 1° равна $\frac{\pi}{180}$:

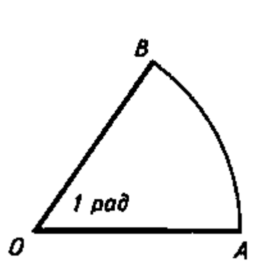


Рис. 12

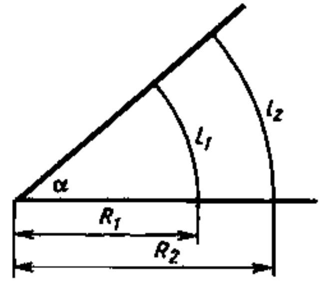


Рис. 13

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад.}$$

Приближенно 1° равен 0,017 рад.

Из равенства $180^\circ = \pi$ рад также следует, что градусная мера угла в 1 рад равна $\frac{180}{\pi}$:

$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi}.$$

Приближенно 1 рад равен 57°.

Рассмотрим примеры перехода от радианной меры к градусной и от градусной меры к радианной.

Пример 1. Выразим в градусах 4,5 рад.

Так как 1 рад $= \frac{180^\circ}{\pi}$, то

$$4{,}5 \text{ рад} = 4{,}5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{810^\circ}{\pi} \approx 258^\circ.$$

Пример 2. Найдем радианную меру угла в 72°.

Так как $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ рад, то

$$72^\circ = 72 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{2\pi}{5} \text{ рад} \approx 1{,}3 \text{ рад.}$$

При записи радианной меры угла обозначение «рад» часто опускают. Например, вместо равенства $72^\circ = \frac{2\pi}{5}$ рад обычно пишут:

$$72^\circ = \frac{2\pi}{5}.$$

Выразим в радианной мере углы 30°, 45°, 60°, 90°, 270° и 360°. Получим:

$$30^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 30 = \frac{\pi}{6}, \qquad 90^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 90 = \frac{\pi}{2},$$

$$45^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 45 = \frac{\pi}{4}, \qquad 270^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 270 = \frac{3}{2}\pi,$$

$$60^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 60 = \frac{\pi}{3}, \qquad 360^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 360 = 2\pi.$$

Радианная мера угла часто используется в тригонометрических выражениях. Так, запись $\sin 1$ означает синус угла в 1 радиан, запись $\sin(-2{,}5)$ означает синус угла в $-2{,}5$ радиана, запись $\sin \frac{\pi}{4}$ означает синус угла в $\frac{\pi}{4}$ радиан. Вообще запись $\sin x$, где x — произвольное действительное число, означает синус угла, равного x радианам.

Значения тригонометрических функций для углов, выраженных как в градусах, так и в радианах, можно находить, используя микрокалькулятор. Так, с помощью микрокалькулятора

«Электроника БЗ-36» значения синуса, косинуса и тангенса вычисляют следующим образом. Переводят переключатель «ГРАД — РАД», находящийся в нижней части корпуса, в положение «ГРАД», если угол задан в градусах, или в положение «РАД», если угол задан в радианах. Вводят угол, нажимают клавишу $\boxed{F}$, а затем клавишу, над которой написано название соответствующей функции.

Пример 3. Найдем с помощью микрокалькулятора значение выражения с точностью до 0,001:

а) $\sin 28°17'$; б) $\cos 3{,}9$; в) $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{7}$.

а) Установим переключатель в положение «ГРАД», затем выразим $28°17'$ в градусах и нажмем последовательно клавиши $\boxed{F}$ и $\boxed{\sin}$. Так как $28°17'=\left(28+\frac{17}{60}\right)^{\circ}$, то программа вычислений выглядит так:

$$17\ \boxed{\div}\ 60\ \boxed{+}\ 28\ \boxed{=}\ \boxed{F}\ \boxed{\sin}.$$

Получаем, что $\sin 28°17'\approx 0{,}474$.

б) Устанавливаем переключатель в положение «РАД» и находим значение $\cos 3{,}9$ по программе:

$$3{,}9\ \boxed{F}\ \boxed{\cos}.$$

Получаем, что $\cos 3{,}9\approx -0{,}726$.

в) Переключатель устанавливаем в положение «РАД». При нахождении значения выражения $\frac{4\pi}{7}$ воспользуемся тем, что на панели микрокалькулятора «Электроника БЗ-36» имеется специальная клавиша π, при нажатии которой высвечивается число 3,1415926 — приближенное значение числа π с точностью до 10^{-7}. Вычисления проводим по программе:

$$\boxed{\pi}\ \boxed{\times}\ 4\ \boxed{\div}\ 7\ \boxed{F}\ \boxed{\operatorname{tg}}.$$

Получаем, что $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{7}\approx -4{,}381$.

Отметим, что для вычисления котангенса угла надо сначала найти значение тангенса этого угла, а потом обратное число, нажав клавиши $\boxed{F}$ и $\boxed{\frac{1}{x}}$.

● **40.** Найдите градусную меру угла, радианная мера которого равна:

а) 0,5; в) $\frac{\pi}{5}$; д) $\frac{3}{4}\pi$; ж) $-\frac{9}{2}\pi$;

б) 10; г) $\frac{\pi}{9}$; е) $-\frac{5}{6}\pi$; з) 12π.

● *41*. Выразите в градусах угол, радианная мера которого равна:

а) 0,2; в) $\frac{5}{2}\pi$; д) $-\frac{1}{3}\pi$;

б) 3,1; г) $-\frac{3}{2}\pi$; е) $\frac{5}{4}\pi$.

● **42.** Найдите радианную меру угла, равного:

а) 135°; в) 36°; д) 240°; ж) −120°;

б) 210°; г) 150°; е) 300°; з) −225°.

● *43*. Выразите угол α в радианах, если:

а) $\alpha = 10°$; д) $\alpha = 225°$;

б) $\alpha = 18°$; е) $\alpha = 390°$;

в) $\alpha = 54°$; ж) $\alpha = -45°$;

г) $\alpha = 200°$; з) $\alpha = -60°$.

44. Выразите в радианах угол, смежный с углом α, если:

а) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$; б) $\alpha = \frac{11}{12}\pi$; в) $\alpha = 0{,}3\pi$.

45. Выразите в радианах углы равнобедренного прямоугольного треугольника.

46. Углом какой четверти является угол α, если:

а) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$; б) $\alpha = 1{,}8\pi$; в) $\alpha = 0{,}6\pi$; г) $\alpha = 1$?

47. Определите знак выражения:

а) $\sin\frac{5\pi}{6}$; в) $\sin 1$; д) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; ж) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}$;

б) $\cos\frac{3\pi}{4}$; г) $\cos 0{,}9$; е) $\operatorname{tg} 3$; з) $\operatorname{ctg} 0{,}2$.

● **48.** Какой знак имеет каждая из тригонометрических функций в промежутке:

а) $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$; в) $\left(\pi;\ \frac{3}{2}\pi\right)$; г) $\left(\frac{3}{2}\pi;\ 2\pi\right)$?

● **49.** Заполните таблицу:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin\alpha$								
$\cos\alpha$								
$\operatorname{tg}\alpha$								
$\operatorname{ctg}\alpha$								

50. Вычислите:

а) $2\sin\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; в) $\cos\pi-2\sin\frac{\pi}{6}$;

б) $\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{3}{2}\pi$; г) $2\cos\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\pi$.

51. Найдите значение выражения:

а) $2\sin\pi-2\cos\frac{3\pi}{2}+3\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$;

б) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+3\cos\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$;

в) $2\sin\frac{\pi}{4}-3\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)-\operatorname{tg}\pi$;

г) $3\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2\sin\frac{\pi}{4}-3\operatorname{tg}0-2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$.

52. Вычислите:

а) $\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{\pi}{3}$; в) $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}$;

б) $\cos^2\frac{\pi}{6}-\cos^2\frac{\pi}{4}$; г) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}$.

53. Найдите значение выражения:

а) $5\sin\frac{\pi}{2}+4\cos0-3\sin\frac{3\pi}{2}+\cos\pi$;

б) $\sin(-\pi)-\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+2\sin2\pi-\operatorname{tg}\pi$;

в) $3-\sin^2\frac{\pi}{3}+2\cos^2\frac{\pi}{2}-5\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}$;

г) $3\sin^2\frac{\pi}{2}-4\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}-3\cos^2\frac{\pi}{6}+3\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2}$.

54. Найдите значение:

а) $\sin 2{,}5\pi$; в) $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{6}$; д) $\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{3}$;

б) $\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$; г) $\sin\left(-\frac{9\pi}{2}\right)$; е) $\operatorname{tg}\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$.

55. Найдите:

а) $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{3}$; б) $\cos\frac{17\pi}{4}$; в) $\sin\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$; г) $\cos(-4{,}5\pi)$.

56. Найдите с помощью микрокалькулятора с точностью до сотых:

а) $\cos 125°37'$; в) $\sin 3{,}48$; д) $\sin 3{,}7\pi$;

б) $\operatorname{tg} 48°12'$; г) $\cos 176{,}5$; е) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{11}$.

Упражнения для повторения

57. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{a-3}{a^2-3a+9}-\frac{6a-18}{a^3+27}\right):\frac{5a-15}{4a^3+108}$;

б) $\left(\frac{x-3}{x^3-64}+\frac{x-3}{x^2+4x+16}\right)\cdot\frac{2x^3-128}{3-x}$.

58. Решите неравенство:

а) $6x-10x^2<0$; б) $7x^2\leqslant -2x$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла α. Для каких значений α имеет смысл каждое из выражений: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$?

2. Какие знаки имеют синус, косинус, тангенс и котангенс в каждой из координатных четвертей?

3. Какие из тригонометрических функций являются четными, какие — нечетными? Запишите соответствующие равенства.

4. Что называют радианом? Выразите в радианах углы, равные 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°, 360°.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

4. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ ОДНОГО И ТОГО ЖЕ УГЛА

Рассмотрим, как связаны между собой синус и косинус одного и того же угла.

Пусть при повороте радиуса OA вокруг точки O на угол α получен радиус OB (рис. 14). По определению

$$\sin\alpha=\frac{y}{R},\qquad \cos\alpha=\frac{x}{R},$$

где x — абсцисса точки B, y — ее ордината, а R — длина радиуса OA. Отсюда

$$x=R\cos\alpha,\qquad y=R\sin\alpha.$$

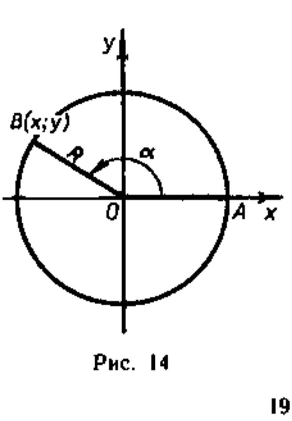


Рис. 14

Так как точка B принадлежит окружности с центром в начале координат, радиус которой равен R, то ее координаты удовлетворяют уравнению

$$x^2+y^2=R^2.$$

Подставив в это уравнение вместо x и y выражения $R\cos\alpha$ и $R\sin\alpha$, получим

$$(R\cos\alpha)^2+(R\sin\alpha)^2=R^2.$$

Разделив обе части последнего равенства на R^2, найдем, что

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1. \tag{1}$$

Равенство (1) верно при любых значениях α.

Выясним теперь, как связаны между собой тангенс, синус и косинус одного и того же угла.

По определению $\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}$. Так как $y=R\sin\alpha$, $x=R\cos\alpha$, то

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{R\sin\alpha}{R\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \tag{2}$$

Аналогично

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=\frac{R\cos\alpha}{R\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

т. е.

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{3}$$

Равенство (2) верно при всех значениях α, при которых $\cos\alpha\neq 0$, а равенство (3) верно при всех значениях α, при которых $\sin\alpha\neq 0$.

С помощью формул (1) — (3) можно получить другие формулы, выражающие соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла.

Из равенств (2) и (3) получим

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=1,$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1. \tag{4}$$

Равенство (4) показывает, как связаны между собой тангенс и котангенс угла α. Оно верно при всех значениях α, при которых $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ имеют смысл.

Заметим, что формулу (4) можно получить и непосредственно из определения тангенса и котангенса.

Выведем теперь формулы, выражающие соотношения между тангенсом и косинусом, а также между котангенсом и синусом одного и того же угла.

Разделив обе части равенства (1) на $\cos^2\alpha$, получим

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1=\frac{1}{\cos^2\alpha},$$

т. е.

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}. \qquad (5)$$

Если обе части равенства (1) разделить на $\sin^2\alpha$, то будем иметь:

$$1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha},$$

т. е.

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}. \qquad (6)$$

Равенство (5) верно, когда $\cos\alpha\neq 0$, а равенство (6), когда $\sin\alpha\neq 0$.

Равенства (1) — (6) являются тождествами. Их называют основными *тригонометрическими тождествами*. Рассмотрим примеры использования этих тождеств для нахождения значений тригонометрических функций по известному значению одной из них.

Пример 1. Найдем $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если известно, что $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Найдем сначала $\cos\alpha$. Из формулы $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ получаем, что $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$.

Так как α является углом II четверти, то его косинус отрицателен. Значит,

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{25}{169}}=-\frac{12}{13}.$$

Зная синус и косинус угла α, можно найти его тангенс:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}=-\frac{5}{12}.$$

Для отыскания котангенса угла α удобно воспользоваться формулой $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$. Имеем:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{12}{5}=-2\frac{2}{5}.$$

Итак,

$$\cos\alpha=-\frac{12}{13},\ \operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{12},\ \operatorname{ctg}\alpha=-2\frac{2}{5}.$$

Пример 2. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=2$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Найдем $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

Воспользовавшись формулой $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, найдем $\cos\alpha$. Имеем:

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}.$$

По условию угол α является углом I четверти, поэтому его косинус положителен. Значит,

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Зная $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, можно найти $\sin\alpha$. Из формулы

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

получим

$$\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha=2\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

По известному $\operatorname{tg}\alpha$ легко найти $\operatorname{ctg}\alpha$:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{2}.$$

Итак,

$$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5},\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5},\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{2}.$$

● **59.** Упростите выражение:

а) $1-\cos^2\alpha$;

б) $\sin^2\alpha-1$;

в) $\cos^2\alpha+(1-\sin^2\alpha)$;

г) $\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha-1$;

д) $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$;

е) $(\cos\alpha-1)(1+\cos\alpha)$.

● *60.* Преобразуйте выражение:

а) $1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$; б) $\cos^2\alpha-(1-2\sin^2\alpha)$.

● **61.** Упростите выражение:

а) $\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha$;

б) $\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha-1$;

в) $\sin^2\alpha-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;

г) $\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$;

д) $\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-1}$;

е) $\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$.

● **62.** Упростите выражение:

а) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha$; б) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$.

● *63.* Преобразуйте выражение:

а) $\sin\alpha \operatorname{ctg}\alpha$;

б) $\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha$;

в) $\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$;

г) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha-1$;

д) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}+1$;

е) $\frac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}$.

● **64.** Известно, что $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найдите:

а) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=-0{,}6$;

б) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{1}{3}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{15}{17}$;

г) $\sin\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=-2$.

● *65.* Зная, что $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, найдите:

а) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=0{,}6$;

б) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{1}{4}$;

в) $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$;

г) $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{12}{13}$.

● **66.** Может ли для какого-нибудь угла β выполняться условие:

а) $\sin\beta=\frac{9}{41}$, $\cos\beta=\frac{40}{41}$;

б) $\sin\beta=\frac{3}{4}$, $\cos\beta=\frac{1}{4}$;

в) $\operatorname{tg}\beta=\frac{5}{9}$, $\operatorname{ctg}\beta=1{,}8$;

г) $\operatorname{tg}\beta=\sqrt{2}-1$, $\operatorname{ctg}\beta=\sqrt{2}+1$?

● **67.** Находя значения синуса и косинуса угла α, ученик получил, что $\sin\alpha\approx0{,}33$, а $\cos\alpha\approx0{,}63$. Докажите, что он ошибся.

● **68.** Найдите:

а) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{9}{41}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

б) $\cos\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{3}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

● *69.* Известно, что α — угол II четверти. Найдите:

а) $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$;

б) $\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=-1$.

● **70.** Найдите значения тригонометрических функций угла α, если известно, что:

а) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

б) $\cos\alpha=\frac{8}{17}$ и α — угол I четверти;

в) $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

г) $\operatorname{ctg}\alpha=-2{,}5$ и α — угол IV четверти.

● *71.* Найдите тригонометрические функции угла β, если:

а) $\sin\beta=\frac{40}{41}$ и $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$;

б) $\cos\beta=\frac{4}{5}$ и $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$;

в) $\operatorname{tg}\beta=1$ и $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$; г) $\operatorname{ctg}\beta=3$ и $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

72. Зная, что:

а) $\sin\alpha=0{,}62$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

б) $\operatorname{tg}\alpha=-2{,}1$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

в) $\cos\alpha=-0{,}23$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

г) $\operatorname{ctg}\alpha=2{,}2$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,

вычислите значения остальных тригонометрических функций угла α. При вычислениях можно использовать микрокалькулятор.

73. Найдите значения тригонометрических функций угла α, если известно, что:

а) $\sin\alpha=\frac{8}{17}$; б) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

74. Выразите тригонометрические функции угла α:
а) через $\sin\alpha$; б) через $\cos\alpha$.

Упражнения для повторения

75. Упростите выражение:

а) $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}\cdot\frac{a^3-b^3}{b^2-a^2}:\left(1-\frac{1+b}{b}\right)$ б) $\frac{ab^2-a^2b}{a+b}\cdot\frac{a+\frac{ab}{a-b}}{a-\frac{ab}{a+b}}$.

76. Пересекаются ли парабола $y=2x^2-6x$ и прямая $y-10x=0$? Если да, то укажите координаты точек пересечения. Проиллюстрируйте ответ с помощью схематического рисунка.

5. ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ К ПРЕОБРАЗОВАНИЮ ВЫРАЖЕНИЙ

Мы уже встречались с некоторыми простейшими преобразованиями тригонометрических выражений. Рассмотрим более сложные примеры.

Пример 1. Упростим выражение $\operatorname{ctg}^2\alpha(\cos^2\alpha-1)$.

Воспользовавшись формулами $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ и $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, получим

$$\operatorname{ctg}^2\alpha(\cos^2\alpha-1)=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}(-\sin^2\alpha)=-\cos^2\alpha.$$

Пример 2. Упростим выражение $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Имеем $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+(1+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\,(1+\cos\alpha)}=$

$$=\frac{\sin^2\alpha+1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\,(1+\cos\alpha)}=\frac{2+2\cos\alpha}{\sin\alpha\,(1+\cos\alpha)}=\frac{2(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha\,(1+\cos\alpha)}=\frac{2}{\sin\alpha}.$$

Пример 3. Докажем тождество

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha.$$

Преобразуем левую часть данного равенства:

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha=\sin^2\alpha\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)=$$
$$=\sin^2\alpha\,(1+\operatorname{tg}^2\alpha-1)=\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha.$$

Мы получили выражение, стоящее в правой части равенства. Таким образом, тождество доказано.

77. Упростите выражение:

а) $1-\frac{1}{\cos^2\alpha}$;

б) $\frac{1}{\sin^2\alpha}-1$;

в) $1-\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$;

г) $\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha-\cos^2\alpha}{2\sin\alpha}$.

78. Преобразуйте выражение:

а) $\operatorname{ctg}\beta-\frac{\cos\beta-1}{\sin\beta}$;

б) $\frac{1}{\sin\alpha-1}-\frac{1}{1+\sin\alpha}$;

в) $\frac{1-\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{tg}\gamma-1}$;

г) $\frac{\sin^2\alpha-1}{\cos^2\alpha-1}+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;

д) $\operatorname{tg}^2\beta\,(\sin^2\beta-1)$;

е) $\cos^2\alpha-(\operatorname{ctg}^2\alpha+1)\sin^2\alpha$.

79. Упростите:

а) $\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}+\operatorname{tg}\alpha$;

б) $\frac{1}{1+\cos\alpha}+\frac{1}{1-\cos\alpha}$;

в) $\operatorname{ctg}^2\beta\,(\cos^2\beta-1)+1$;

г) $\frac{\operatorname{tg}\beta+1}{1+\operatorname{ctg}\beta}$.

80. Докажите, что при всех допустимых значениях β значение выражения не зависит от β:

а) $\frac{1+2\sin\beta\cos\beta}{(\sin\beta+\cos\beta)^2}$;

б) $\frac{\sin^2\beta-\cos^2\beta+1}{\sin^2\beta}$;

в) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\beta}+\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\beta}$;

г) $\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}\cdot\frac{1-\sin\beta}{\cos\beta}$.

81. Докажите, что при всех допустимых значениях α выражение принимает одно и то же значение:

а) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-2\sin\alpha\cos\alpha$;

б) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

в) $\frac{2-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{3\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha}$;

г) $\frac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$.

82. Упростите выражение:

а) $\operatorname{tg}(-\alpha)\cos\alpha+\sin\alpha$;

б) $\dfrac{\operatorname{ctg}(-\alpha)\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

в) $\cos^2\alpha\operatorname{tg}^2(-\alpha)-1$;

г) $\dfrac{1-\operatorname{tg}(-\alpha)}{\sin\alpha+\cos(-\alpha)}$.

83. Преобразуйте выражение:

а) $\operatorname{ctg}\alpha\sin(-\alpha)-\cos(-\alpha)$;

б) $\dfrac{1-\sin^2(-x)}{\cos x}$;

в) $\operatorname{tg}(-\beta)\operatorname{ctg}\beta+\sin^2\beta$;

г) $\dfrac{\operatorname{tg}(-x)+1}{1-\operatorname{ctg}x}$.

84. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$;

б) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\operatorname{tg}\alpha$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\varphi-1}{\operatorname{tg}^2\varphi+1}+\cos^2\varphi$;

г) $\dfrac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}+\sin\alpha\cos\alpha$.

85. Найдите наибольшее значение выражения:

а) $1-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$;

б) $1-\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha$;

в) $\cos^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha+5\cos^2\alpha-1$;

г) $\sin\alpha+3\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha$.

86. Зная, что $\sin\alpha+\cos\alpha=0{,}8$, найдите $\sin\alpha\cos\alpha$.

87. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2{,}3$, найдите $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$.

88. Докажите тождество:

а) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2=4$;

б) $(2+\sin\beta)(2-\sin\beta)+(2+\cos\beta)(2-\cos\beta)=7$;

в) $\operatorname{ctg}\alpha+\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha}$;

г) $\dfrac{1-2\sin x\cos x}{\sin x-\cos x}=\sin x-\cos x$.

89. Докажите, что при всех допустимых значениях α верно равенство:

а) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$;

б) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}$;

в) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$;

г) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\cos^2\alpha$.

90. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha$;

б) $(1+\operatorname{tg}\alpha)^2+(1-\operatorname{tg}\alpha)^2=\dfrac{2}{\cos^2\alpha}$;

в) $\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta}-\dfrac{\cos\beta}{1+\sin\beta}=2\operatorname{tg}\beta$;

г) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$;

д) $\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;

е) $\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

91. Докажите тождество:

а) $(\sin\beta+\sin\alpha)(\sin\alpha-\sin\beta)-(\cos\alpha+\cos\beta)(\cos\beta-\cos\alpha)=0$;

б) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha$;

в) $\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}=\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

г) $\dfrac{1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}+2\sin\alpha\cos\alpha=1$.

92. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $1-\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=0{,}7$;

б) $\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$.

93. Найдите значение выражения, предварительно упростив его:

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},\ \text{если}\ \sin\alpha=-\frac{1}{8}.$$

Упражнения для повторения

94. Найдите значение выражения:

а) $\cos 8{,}5\pi$;

б) $\operatorname{tg} 9\pi$;

в) $\sin(-3{,}5\pi)$;

г) $\operatorname{ctg}\dfrac{9\pi}{4}$;

д) $\cos\left(-\dfrac{19\pi}{3}\right)$.

95. Разность катетов прямоугольного треугольника равна 5 дм. Если больший катет увеличить на 4 дм, а другой уменьшить на 8 дм, то полученный прямоугольный треугольник будет иметь гипотенузу той же длины, что и первоначальный треугольник. Найдите длины катетов данного треугольника.

96. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 79 см. Если один из катетов увеличить на 23 см, а другой уменьшить на 11 см, то новый прямоугольный треугольник будет иметь гипотенузу той же длины, что и данный. Найдите длины катетов данного треугольника.

6. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Тригонометрические функции углов вида $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3}{2}\pi\pm\alpha$ и $2\pi\pm\alpha$ могут быть выражены через функции угла α с помощью формул, которые называют *формулами приведения.*

Выведем сначала формулы приведения для синуса и косинуса.

Докажем, что для любого α

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha\ \text{и}\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha. \qquad (1)$$

Повернем радиус OA, длина которого равна R, на угол α и на угол $\frac{\pi}{2}+\alpha$. При этом радиус OA перейдет соответственно в радиусы OB_1 и OB_2 (рис. 15).

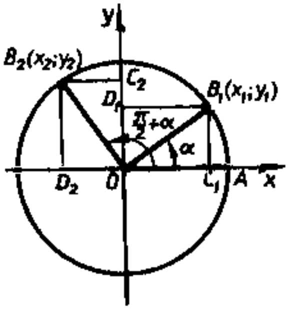


Рис. 15

Опустим из точки B_1 перпендикуляры B_1C_1 и B_1D_1 на оси координат. Получим прямоугольник $OD_1B_1C_1$.

Повернем прямоугольник $OD_1B_1C_1$ около точки O на угол $\frac{\pi}{2}$. Тогда точка B_1 перейдет в точку B_2, точка C_1 перейдет в точку C_2 на оси y, точка D_1 — в точку D_2 на оси x, а прямоугольник $OD_1B_1C_1$ перейдет в равный ему прямоугольник $OD_2B_2C_2$.

Отсюда следует, что ордината точки B_2 равна абсциссе точки B_1, а абсцисса точки B_2 равна числу, противоположному ординате точки B_1. Обозначим координаты точки B_1 через x_1 и y_1, а координаты точки B_2 через x_2 и y_2. Тогда

$$y_2 = x_1 \text{ и } x_2 = -y_1.$$

Поэтому

$$\frac{y_2}{R} = \frac{x_1}{R} \text{ и } \frac{x_2}{R} = -\frac{y_1}{R}.$$

Значит,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha \text{ и } \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha.$$

Из формул (1) следует, что

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha \text{ и } \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha.$$

Действительно, представим разность $\frac{\pi}{2}-\alpha$ в виде суммы $\frac{\pi}{2}+(-\alpha)$. Тогда

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+(-\alpha)\right) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+(-\alpha)\right) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha.$$

Формулы приведения для синуса и косинуса угла $\pi+\alpha$ выглядят так:

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha \text{ и } \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha. \qquad (2)$$

Для доказательства достаточно представить $\pi+\alpha$ в виде $\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ и дважды воспользоваться формулами (1). Например:

$$\cos(\pi+\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)=$$
$$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha.$$

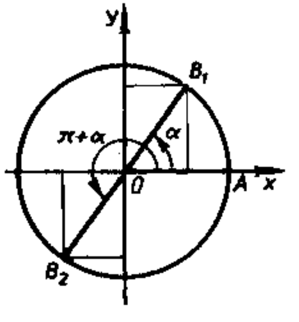


Рис. 16

Заметим, что к формулам (2) легко прийти и из геометрических соображений (рис. 16). При повороте радиуса OA на угол α и на угол $\pi+\alpha$ точка A перейдет соответственно в точки B_1 и B_2, которые симметричны относительно начала координат. Абсциссы, а также ординаты симметричных относительно начала координат точек равны по модулю и противоположны по знаку. Отсюда следует, что $\sin(\pi+\alpha)$ и $\sin\alpha$, а также $\cos(\pi+\alpha)$ и $\cos\alpha$ — противоположные числа.

Из формул (2) следует, что

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \text{ и } \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha.$$

Для доказательства достаточно представить $\pi-\alpha$ в виде суммы $\pi+(-\alpha)$ и применить формулы (2).

Формулы приведения для синуса и косинуса угла $\frac{3}{2}\pi+\alpha$ имеют вид:

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha \text{ и } \cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=\sin\alpha. \qquad (3)$$

Чтобы доказать формулы (3), достаточно представить $\frac{3}{2}\pi+\alpha$ в виде $\frac{\pi}{2}+(\pi+\alpha)$ и применить последовательно формулы (1) и (2).

Из формул (3) нетрудно получить, что

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\cos\alpha \text{ и } \cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\sin\alpha.$$

Наконец, формулы приведения для синуса и косинуса угла $2\pi+\alpha$ следуют из того, что при изменении угла на целое число оборотов значения синуса и косинуса не изменяются:

$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha \text{ и } \cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha. \qquad (4)$$

Справедливы также формулы

$$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha \text{ и } \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha.$$

Например, для $\sin(2\pi-\alpha)$ имеем:

$$\sin(2\pi-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha.$$

Формулы приведения для тангенса и котангенса можно получить с помощью формул приведения для синуса и косинуса. Например:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)=\frac{\cos(\pi+\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Все формулы приведения сведем в две таблицы, поместив в первой из них формулы для углов $\pi\pm\alpha$ и $2\pi\pm\alpha$, а во второй — для углов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ и $\frac{3}{2}\pi\pm\alpha$:

x	$\pi+\alpha$	$\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

x	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3}{2}\pi+\alpha$	$\frac{3}{2}\pi-\alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$

По таблицам легко проследить закономерности, имеющие место для формул приведения. Эти закономерности позволяют сформулировать правило, с помощью которого можно записать любую формулу приведения, не прибегая к таблице:

функция в правой части равенства берется с тем же знаком, какой имеет исходная функция, если считать, что угол α является углом I четверти;

для углов $\pi \pm \alpha$ и $2\pi \pm \alpha$ название исходной функции сохраняется; для углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ и $\frac{3}{2}\pi \pm \alpha$ название исходной функции заменяется (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс).

Пример 1. Выразим $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$ через тригонометрическую функцию угла α.

Если считать, что α является углом I четверти, то $\pi - \alpha$ будет углом II четверти. Во II четверти тангенс отрицателен, значит, в правой части равенства следует поставить знак «минус». Для угла $\pi - \alpha$ название исходной функции «тангенс» сохраняется. Поэтому

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

С помощью формул приведения нахождение значений тригонометрических функций любого угла можно свести к нахождению значений тригонометрических функций угла от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Пример 2. Найдем значение $\cos\frac{8\pi}{3}$.

Имеем:

$$\cos\frac{8\pi}{3} = \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Пример 3. Найдем значение $\sin(-585^\circ)$.

Имеем:

$$\sin(-585^\circ) = -\sin 585^\circ = -\sin(360^\circ + 225^\circ) =$$
$$= -\sin 225^\circ = -\sin(180^\circ + 45^\circ) = -(-\sin 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

● **97.** Замените тригонометрической функцией угла α:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; д) $\cos(2\pi - \alpha)$; и) $\operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha)$;

б) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$; е) $\sin(2\pi + \alpha)$; к) $\cos(90^\circ - \alpha)$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$; ж) $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$; л) $\sin(270^\circ - \alpha)$;

г) $\operatorname{ctg}(\pi + \alpha)$; з) $\sin(180^\circ + \alpha)$; м) $\operatorname{tg}(270^\circ + \alpha)$.

● *98.* Приведите к тригонометрической функции угла α:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; г) $\cos(2\pi + \alpha)$; ж) $\sin(360^\circ + \alpha)$;

б) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$; д) $\operatorname{ctg}(\pi - \alpha)$; з) $\cos(90^\circ + \alpha)$;

в) $\operatorname{tg}(\pi + \alpha)$; е) $\sin(\pi + \alpha)$; и) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$.

● **99.** Выразите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ через тригонометрическую функцию угла от 0° до 90°, если:

а) $\alpha = 130^\circ$; в) $\alpha = -320^\circ$;

б) $\alpha = 190^\circ$; г) $\alpha = -590^\circ$.

100. Приведите к тригонометрической функции угла из промежутка $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$:

а) $\cos 0{,}7\pi$; б) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3}{5}\pi\right)$; в) $\sin 1{,}6\pi$; г) $\operatorname{tg}\left(-\frac{9\pi}{5}\right)$.

101. Приведите к тригонометрической функции угла от 0° до 90°:

а) $\operatorname{tg} 137°$; б) $\sin(-178°)$; в) $\sin 680°$; г) $\cos(-1000°)$.

● **102.** Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если:

а) $\alpha = \frac{2}{3}\pi$; б) $\alpha = \frac{3}{4}\pi$; в) $\alpha = \frac{5}{6}\pi$.

● **103.** Найдите значение выражения:

а) $\sin 240°$; в) $\operatorname{tg} 300°$; д) $\operatorname{ctg}(-225°)$;
б) $\cos(-210°)$; г) $\sin 330°$; е) $\sin 315°$.

● *104.* Найдите:

а) $\cos 120°$; в) $\operatorname{tg}(-225°)$; д) $\cos\frac{7}{6}\pi$;

б) $\sin(-150°)$; г) $\cos(-225°)$; е) $\sin\frac{4\pi}{3}$.

105. Упростите выражение:

а) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; в) $\operatorname{ctg}(\alpha - 360°)$;
б) $\cos(\alpha - \pi)$; г) $\operatorname{tg}(-\alpha + 270°)$.

106. Упростите выражение:

а) $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$; б) $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$; в) $\operatorname{tg}(\alpha - 2\pi)$.

107. Преобразуйте выражение:

а) $\sin^2(\pi + \alpha)$; б) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; в) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

108. Докажите, что если A, B и C — углы треугольника, то

$$\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}.$$

109. Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

110. Упростите выражение:

а) $\sin(90° - \alpha) + \cos(180° + \alpha) + \operatorname{tg}(270° + \alpha) + \operatorname{ctg}(360° + \alpha)$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos(\alpha - \pi) + \operatorname{tg}(\pi - \alpha) + \operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)$.

111. Преобразуйте выражение:

а) $\dfrac{\cos(-\alpha)\cos(180° + \alpha)}{\sin(-\alpha)\sin(90° + \alpha)}$; в) $\dfrac{\sin(-\alpha)\operatorname{ctg}(-\alpha)}{\cos(360° - \alpha)\operatorname{tg}(180° + \alpha)}$;

б) $\dfrac{\sin(\pi + \alpha)\cos(2\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)\cos(\alpha - \pi)}$; г) $\dfrac{\sin(\pi + \alpha)\sin(\alpha + 2\pi)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)\cos(1{,}5\pi + \alpha)}$.

112. Упростите выражение:

а) $\sin^2(180^\circ - x) + \sin^2(270^\circ - x)$;

б) $\sin(\pi - x)\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\cos(\pi - x)$.

113. Упростите выражение:

а) $\cos^2(\pi + x) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$;

б) $\sin(\pi + x)\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos(2\pi + x)\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

114. Докажите, что:

а) $\frac{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)} = \operatorname{tg}^2 \alpha$;

б) $\frac{\sin(\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} \cdot \frac{\cos(2\pi - \alpha)}{\sin(-\alpha)} = \sin \alpha$.

115. Докажите, что:

а) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha$;

б) $\operatorname{ctg}^2(2\pi - \alpha) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

Упражнения для повторения

116. Известно, что $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найдите:

а) $\sin \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\cos \alpha = -0{,}8$;

б) $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = -5$.

117. Докажите, что

$$\sin^3 \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha) + \cos^3 \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha.$$

118. От станций A и B, расстояние между которыми 75 км, отправились одновременно товарный и скорый поезда и встретились через полчаса. Товарный поезд прибыл в B на 25 мин позже, чем скорый в A. Какова скорость каждого поезда?

119. За 70 км до конечной станции поезд опаздывал на 10 мин. Чтобы прийти в пункт назначения вовремя, машинист увеличил скорость на 10 км/ч. С какой скоростью шел поезд последние 70 км?

Контрольные вопросы

1. Запишите формулу, выражающую связь между синусом и косинусом одного и того же угла. Проведите доказательство.

2. Запишите формулы, выражающие тангенс и котангенс через синус и косинус. Проведите доказательство.

3. Выведите формулы:

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=1;\ 1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha};\ 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

4. Запишите формулы приведения для углов $\frac{\pi}{2}+\alpha$ и $\pi-\alpha$.

§ 3. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ И ИХ СЛЕДСТВИЯ

7. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

Выведем формулы, выражающие тригонометрические функции суммы и разности двух углов через тригонометрические функции этих углов.

Повернем радиус OA, равный R, около точки O на угол α и на угол β (рис. 17). Получим радиусы OB и OC.

Найдем скалярное произведение векторов $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$. Пусть координаты точки B равны x_1 и y_1, координаты точки C равны x_2 и y_2. Эти же координаты имеют соответственно и векторы $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$. По определению скалярного произведения векторов:

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=x_1x_2+y_1y_2.$$

Выразим скалярное произведение $\overline{OB}\cdot\overline{OC}$ через тригонометрические функции углов α и β. Из определения косинуса и синуса следует, что

$$x_1=R\cos\alpha,\ y_1=R\sin\alpha,\ x_2=R\cos\beta,\ y_2=R\sin\beta.$$

Подставив значения x_1, x_2, y_1, y_2 в правую часть равенства $\overline{OB}\cdot\overline{OC}=x_1x_2+y_1y_2$, получим

$$\overline{OB}\cdot\overline{OC}=R^2\cos\alpha\cos\beta+R^2\sin\alpha\sin\beta=$$
$$=R^2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta).$$

Значит,

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=R^2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta).$$

С другой стороны, по теореме о скалярном произведении векторов имеем:

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{OC}|\cdot\cos\angle BOC=R^2\cos\angle BOC.$$

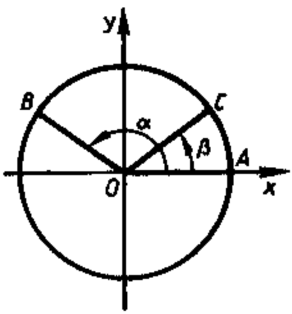


Рис. 17

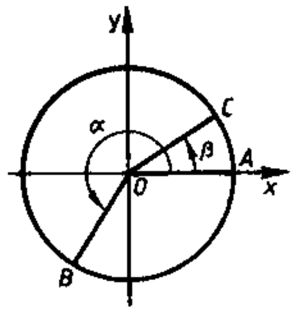


Рис. 18

Угол BOC между векторами $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ может быть равен $\alpha-\beta$ (см. рис. 17), $2\pi-(\alpha-\beta)$ (рис. 18) либо может отличаться от этих значений на целое число оборотов. В любом из этих случаев $\cos\angle BOC=\cos(\alpha-\beta)$.

Поэтому

$$\overline{OB}\cdot\overline{OC}=R^2\cos(\alpha-\beta).$$

Таким образом, $R^2\cos(\alpha-\beta)=R^2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$. Значит,

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \qquad (1)$$

Формулу (1) называют *формулой косинуса разности.*

Косинус разности двух углов равен произведению косинусов этих углов плюс произведение синусов этих углов.

С помощью формулы (1) легко получить *формулу косинуса суммы*:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\ \cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Значит,

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \qquad (2)$$

Косинус суммы двух углов равен произведению косинусов этих углов минус произведение синусов этих углов.

Выведем теперь *формулы синуса суммы* и *синуса разности.* Используя формулы приведения и формулу (1), получим

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Значит,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \qquad (3)$$

Синус суммы двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго плюс произведение косинуса первого угла на синус второго.

Для синуса разности имеем:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Значит,

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \qquad (4)$$

Синус разности двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго минус произведение косинуса первого угла на синус второго.

Формулы (1) — (4) называют *формулами сложения* для синуса и косинуса.

Приведем примеры использования формул сложения.

Пример 1. Вычислим $\cos 15°$ и $\sin 15°$.

Представим $15°$ в виде разности $45°-30°$. Тогда

$$\cos 15°=\cos(45°-30°)=\cos 45°\cos 30°+\sin 45°\sin 30°=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

$$\sin 15°=\sin(45°-30°)=\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Пример 2. Упростим выражение $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$.

Воспользовавшись формулами косинуса суммы и косинуса разности, получим

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+$$
$$+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=2\cos\alpha\cos\beta.$$

Используя формулы (1) — (4), можно вывести формулы сложения для тангенса и котангенса. Выведем, например, формулу тангенса суммы:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Разделим числитель и знаменатель этой дроби на произведение $\cos\alpha\cos\beta$, предполагая, что $\cos\alpha\neq 0$ и $\cos\beta\neq 0$. Получим

$$\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Значит,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (5)$$

Аналогично можно доказать, что

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (6)$$

● **120.** С помощью формул сложения преобразуйте выражение:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)$; в) $\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$; г) $\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$.

● **121.** Используя формулы сложения, проверьте, что:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$; в) $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$;

б) $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$; г) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$.

● *122.* Используя формулы сложения, преобразуйте выражение:

а) $\sin(60°-\beta)$; б) $\cos(\beta-30°)$.

123. Представив 105° как сумму $60°+45°$, вычислите:

а) $\sin 105°$; б) $\cos 105°$.

124. Представив 75° как сумму $30°+45°$, вычислите:

а) $\sin 75°$; б) $\cos 75°$.

● **125.** Упростите выражение:

а) $\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\cos\beta$; в) $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\frac{1}{2}\cos\alpha$;

б) $\sin\alpha\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)$; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$.

● **126.** Упростите выражение:

а) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\alpha$; в) $2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha$;

б) $\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\alpha$; г) $\sqrt{3}\cos\alpha-2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$.

● *127.* Упростите:

а) $\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\cos\beta$; в) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\frac{1}{2}\sin\alpha$;

б) $\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)$; г) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$.

● **128.** Докажите тождество:

а) $\cos(\alpha-\beta)+\sin(-\alpha)\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta$;

б) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(-\alpha)\cos(-\beta)=\cos\alpha\sin\beta$.

● *129.* Докажите тождество:

а) $\sin(\alpha-\beta)-\cos\alpha\sin(-\beta)=\sin\alpha\cos\beta$;

б) $\cos(\alpha+\beta)+\sin(-\alpha)\sin(-\beta)=\cos\alpha\cos\beta$.

130. Упростите выражение:

а) $\cos 2\beta\cos\beta+\sin 2\beta\sin\beta$;

б) $\sin 3\gamma\cos\gamma-\cos 3\gamma\sin\gamma$.

131. Найдите значение выражения:

а) $\cos 107^\circ \cos 17^\circ + \sin 107^\circ \sin 17^\circ$;

б) $\cos 36^\circ \cos 24^\circ - \sin 36^\circ \sin 24^\circ$;

в) $\sin 63^\circ \cos 27^\circ + \cos 63^\circ \sin 27^\circ$;

г) $\sin 51^\circ \cos 21^\circ - \cos 51^\circ \sin 21^\circ$.

132. Вычислите:

а) $\cos 18^\circ \cos 63^\circ + \sin 18^\circ \sin 63^\circ$;

б) $\cos 32^\circ \cos 58^\circ - \sin 32^\circ \sin 58^\circ$.

133. Упростите выражение:

а) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)$.

134. Докажите, что:

а) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$;

б) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta$;

в) $\cos(60^\circ-\alpha)-\cos(60^\circ+\alpha)=\sqrt{3}\sin\alpha$;

г) $\sin(30^\circ-\alpha)+\sin(30^\circ+\alpha)=\cos\alpha$.

135. Упростите выражение:

а) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$;   б) $\cos(30^\circ+\alpha)-\cos(30^\circ-\alpha)$.

136. Докажите тождество:

а) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;

б) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

137. Упростите:

а) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\sin\beta}$;   б) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)+2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}$.

138. Упростите:

а) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$;   б) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}$.

139. Зная, что $\sin\alpha=\frac{8}{17}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$, α и β — углы I четверти, найдите значение выражения:

а) $\sin(\alpha+\beta)$;   б) $\cos(\alpha+\beta)$;   в) $\cos(\alpha-\beta)$.

140. Найдите $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{9}{41}$, $\sin\beta=-\frac{40}{41}$, α — угол II четверти, а β — угол IV четверти.

141. Известно, что α и β — углы II четверти и $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=-\frac{15}{17}$. Найдите:

а) $\sin(\alpha+\beta)$;   в) $\cos(\alpha-\beta)$;

б) $\sin(\alpha-\beta)$;   г) $\cos(\alpha+\beta)$.

142. Докажите, что если α, β и γ — углы треугольника, то

$$\sin\gamma=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

143. Синусы двух острых углов треугольника равны $\frac{4}{5}$ и $\frac{5}{13}$. Найдите косинус третьего угла треугольника.

144. Косинусы двух углов треугольника равны $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$. Найдите синус третьего угла треугольника.

145. Зная, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$ и $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{4}$, найдите $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

146. Вычислите: а) $\operatorname{tg} 15°$; б) $\operatorname{tg} 75°$.

147. Используя нечетность тангенса, выразите $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ через $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$.

148. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}$. Найдите:

а) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$; б) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

Упражнения для повторения

149. Найдите значение:

а) $\sin 480°$; в) $\operatorname{tg}(-750°)$;
б) $\cos(-570°)$; г) $\operatorname{ctg} 495°$.

150. Докажите, что

$$\frac{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

151. Упростите выражение:

а) $\frac{\cos \alpha - \sin(-\alpha)}{1 - \operatorname{ctg}(-\alpha)}$; б) $\operatorname{tg}(-\alpha) \operatorname{ctg} \alpha + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg}(-\alpha)}$.

152. Решите неравенство:

а) $(x+4)(x+5) - 5 \leqslant 7$; б) $6 - (2x + 1{,}5)(4 - x) \geqslant 0$.

153. Два автопогрузчика выполнили работу за 20 ч. За сколько часов может выполнить эту работу каждый автопогрузчик, работая один, если известно, что второй может выполнить ее на 9 ч быстрее, чем первый?

8. ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

Формулы сложения позволяют выразить $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha$ через тригонометрические функции угла α.

Положим в формулах

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

β равным α. Получим тождества:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (1)$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \qquad (3)$$

Эти тождества называют *формулами двойного угла.*

Приведем примеры применения формул двойного угла для нахождения значений тригонометрических функций и преобразования тригонометрических выражений.

Пример 1. Найдем значение $\sin 2\alpha$, зная, что $\cos \alpha = -0{,}8$ и α — угол III четверти.

Сначала вычислим $\sin \alpha$. Так как α — угол III четверти, то $\sin \alpha < 0$. Поэтому

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0{,}64} = -\sqrt{0{,}36} = -0{,}6.$$

По формуле синуса двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot (-0{,}6) \cdot (-0{,}8) = 0{,}96.$$

Пример 2. Упростим выражение

$$\sin \alpha \cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha \cos \alpha.$$

Вынесем за скобки $\sin \alpha \cos \alpha$ и воспользуемся формулами двойного угла:

$$\sin \alpha \cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha \cos \alpha = \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) =$$
$$= \frac{1}{2}(2 \sin \alpha \cos \alpha) \cos 2\alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha.$$

Из формулы (2) следует, что

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha. \qquad (4)$$

Действительно, выразив $\cos 2\alpha$ через $\sin \alpha$, получим

$$\cos 2\alpha = (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$

Отсюда $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$.

Аналогично, выразив $\cos 2\alpha$ через $\cos \alpha$, получим

$$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha. \qquad (5)$$

Формулы (4) и (5) используются в вычислениях и преобразованиях.

Пример 3. Упростим выражение $\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$.

Применим формулы (4) и (5) к выражениям

$$1 - \cos \alpha \text{ и } 1 + \cos \alpha,$$

представив α в виде произведения $2 \cdot \frac{\alpha}{2}$. Получим

$$\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

● **154.** Упростите выражение:

а) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$; г) $\cos 2\alpha + \sin^2 \alpha$;

б) $\frac{2\cos^2 \alpha}{\sin 2\alpha}$; д) $\cos^2 \beta - \cos 2\beta$;

в) $\frac{\sin 2\beta}{\cos \beta} - \sin \beta$; е) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} - \cos \alpha$.

● **155.** Сократите дробь:

а) $\frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}$; в) $\frac{\cos 80^\circ}{\cos 40^\circ + \sin 40^\circ}$;

б) $\frac{\sin 100^\circ}{\cos 50^\circ}$; г) $\frac{\cos 36^\circ + \sin^2 18^\circ}{\cos 18^\circ}$.

● *156.* Упростите:

а) $\frac{\sin 2\beta}{\sin^2 \beta}$; в) $\sin^2 \gamma + \cos 2\gamma$;

б) $\frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha} - \cos \alpha$; г) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} - \sin \alpha$.

157. Пусть $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ и α — угол II четверти. Найдите:
а) $\sin 2\alpha$; б) $\cos 2\alpha$; в) $\operatorname{tg} 2\alpha$.

158. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ и $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Найдите:
а) $\sin 2\alpha$; б) $\cos 2\alpha$; в) $\operatorname{tg} 2\alpha$.

159. Косинус угла при основании равнобедренного треугольника — 0,8. Найдите синус и косинус угла при его вершине.

160. Пусть $\cos \alpha = -0{,}6$ и α — угол III четверти. Найдите:
а) $\sin 2\alpha$; б) $\cos 2\alpha$; в) $\operatorname{tg} 2\alpha$.

● **161.** Используя формулы двойного угла, выразите:

а) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$ через тригонометрические функции угла $\frac{\alpha}{2}$;

б) $\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha$ и $\operatorname{tg} 4\alpha$ через тригонометрические функции угла 2α.

● **162.** Упростите выражение:

а) $\frac{\sin \alpha}{2\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$; в) $\frac{\cos \varphi}{\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2}}$;

б) $\frac{\sin 4\beta}{\cos 2\beta}$; г) $\frac{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha}$.

163. Найдите значения $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{9}{41}$ и $0 < \alpha < \pi$.

● **164.** Упростите выражение:

а) $\frac{\sin 2\alpha - 2\sin\alpha}{\cos\alpha - 1}$;

б) $\frac{\cos 2\alpha - \cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$;

в) $\sin 2\alpha \operatorname{ctg}\alpha - 1$;

г) $(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha)\sin 2\alpha$.

● **165.** Упростите:

а) $0{,}5\operatorname{tg}\alpha\sin 2\alpha + \cos^2\alpha$;

б) $\frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta + \sin^2\beta}$.

● **166.** Вычислите:

а) $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$;

б) $8\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$;

в) $\sin 105^\circ \cos 105^\circ$;

г) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$;

д) $4\cos^2\frac{\pi}{8} - 4\sin^2\frac{\pi}{8}$;

е) $\cos^2\frac{7\pi}{12} - \sin^2\frac{7\pi}{12}$.

167. Упростите:

а) $\frac{2\operatorname{tg}5^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 5^\circ}$; б) $\frac{4\operatorname{tg}15^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}$; в) $\frac{\operatorname{tg}75^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 75^\circ}$.

168. Найдите значение выражения:

а) $2\sin 165^\circ \cos 165^\circ$;

б) $\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ$;

в) $\frac{2\operatorname{tg}240^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 240^\circ}$.

169. Упростите выражение:

а) $\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$;

б) $(1-\operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha$;

в) $\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\sin^2 2\alpha$;

г) $\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\cos\frac{\pi-\alpha}{2}$;

д) $2\cos^2\frac{\pi+\alpha}{4} - 2\sin^2\frac{\pi+\alpha}{4}$;

е) $\frac{4\operatorname{tg}\frac{3\pi-\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{3\pi-\alpha}{2}}$.

170. Докажите тождество:

а) $1-(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \sin 2\alpha$;

б) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$;

в) $\operatorname{ctg}\alpha - \sin 2\alpha = \operatorname{ctg}\alpha\cos 2\alpha$;

г) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2\operatorname{ctg}\alpha$.

171. Докажите тождество:

а) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha = 1$;

б) $4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha = \sin 4\alpha$;

в) $\sin 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \cos 2\alpha\operatorname{tg}\alpha$;

г) $(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha)\sin 2\alpha = 2\cos 2\alpha$.

172. Упростите выражение:

а) $4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

б) $\frac{(\sin\beta + \cos\beta)^2}{1+\sin 2\beta}$;

в) $\frac{\sin^2\alpha\operatorname{ctg}\alpha}{\sin 2\alpha}$;

г) $\left(\frac{\cos\beta}{1+\sin\beta} + \frac{\cos\beta}{1-\sin\beta}\right)\sin 2\beta$.

173. Упростите:

а) $4\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{2\pi+\alpha}{4}\cos\frac{2\pi+\alpha}{2}$;

б) $\frac{2\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$;

в) $\frac{1}{1-\mathrm{tg}\,\alpha}-\frac{1}{1+\mathrm{tg}\,\alpha}$;

г) $\left(\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right)\sin 2\alpha$.

174. Упростите выражение:

а) $1+\cos 4\alpha$;

б) $1-\cos 4\alpha$;

в) $\frac{1+\cos 2\alpha}{2\cos\alpha}$;

г) $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$;

д) $\mathrm{tg}\,\alpha\,(1+\cos 2\alpha)$;

е) $\frac{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}$;

ж) $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$;

з) $\frac{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{2}$.

175. Упростите:

а) $\frac{\sin 2\beta}{1+\cos 2\beta}$;

б) $\frac{1-\cos 2\beta}{2\sin\beta}$;

в) $\mathrm{ctg}\,\beta\,(1-\cos 2\beta)$;

г) $\frac{1+\cos 4\beta}{\cos^2\beta-\sin^2\beta}$;

д) $\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\beta\right)}{2\sin\beta}$;

е) $\frac{1+\cos(\pi+\beta)}{\sin(\pi-\beta)}$.

176. Докажите тождество

$$1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

177. Упростите выражение:

а) $\frac{1+\cos 2\varphi}{1-\cos 2\varphi}$; б) $\frac{1-\sin 2\varphi}{1+\sin 2\varphi}$.

178. Существует ли такой угол x, при котором:

а) $\sin x\cos x=\frac{3}{7}$; б) $\sin x\cos x=\frac{3}{5}$?

Упражнения для повторения

179. Упростите выражение:

а) $\cos(3\pi-\alpha)$;

б) $\mathrm{ctg}(5\pi+\alpha)$;

в) $\sin(\pi+\alpha)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$;

г) $\mathrm{tg}(\pi-\alpha)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$.

180. Упростите выражение:

а) $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}$; б) $\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

181. Решите неравенство:

а) $x(x+5)\leqslant 2x^2+4$; б) $10-(2x-1)(3-x)\geqslant 1-7x$.

182. Два сварщика, работая вместе, могут выполнить задание за 30 ч. За сколько часов сможет выполнить это задание каждый сварщик, если известно, что первому на выполнение всей работы потребуется времени на 11 ч больше, чем второму?

9. ФОРМУЛЫ СУММЫ И РАЗНОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Сумму и разность синусов или косинусов можно представить в виде произведения тригонометрических функций. Формулы, на которых основано такое преобразование, могут быть получены из формул сложения.

Чтобы представить в виде произведения сумму $\sin\alpha+\sin\beta$, положим $\alpha=x+y$ и $\beta=x-y$ и воспользуемся формулами синуса суммы и синуса разности. Получим

$$\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=$$
$$=\sin x\cos y+\cos x\sin y+\sin x\cos y-\cos x\sin y=$$
$$=2\sin x\cos y.$$

Из равенств $\alpha=x+y$ и $\beta=x-y$ находим, что $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ и $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$. Поэтому

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Мы получили *формулу суммы синусов* двух углов.

Сумма синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности.

Аналогично можно вывести *формулы разности синусов, суммы и разности косинусов.*

Формула разности синусов:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Разность синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полуразности этих углов на косинус их полусуммы.

Формула суммы косинусов:

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Сумма косинусов двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности.

Формула разности косинусов:

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Разность косинусов двух углов равна взятому со знаком «минус» удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на синус их полуразности.

Учитывая, что $-\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\sin\left(-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$, формулу разности косинусов можно записать в другом виде:

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

Приведем примеры применения полученных формул.

Пример 1. Упростим сумму $\sin 10°+\sin 50°$.

Воспользовавшись формулой суммы синусов, получим

$$\sin 10°+\sin 50°=2\sin\frac{10°+50°}{2}\cos\frac{10°-50°}{2}=$$
$$=2\sin 30°\cos(-20°)=2\cdot\frac{1}{2}\cos 20°=\cos 20°.$$

Пример 2. Представим в виде произведения разность $\cos 0{,}3\pi-\sin 0{,}6\pi$.

Воспользовавшись формулой приведения, представим данное выражение в виде разности косинусов и преобразуем ее в произведение. Тогда

$$\cos 0{,}3\pi-\sin 0{,}6\pi=\cos 0{,}3\pi-\sin(0{,}5\pi+0{,}1\pi)=$$
$$=\cos 0{,}3\pi-\cos 0{,}1\pi=-2\sin\frac{0{,}3\pi+0{,}1\pi}{2}\sin\frac{0{,}3\pi-0{,}1\pi}{2}=$$
$$=-2\sin 0{,}2\pi\sin 0{,}1\pi.$$

Пример 3. Представим в виде произведения выражение $1-\sin\alpha$.

Так как $1=\sin\frac{\pi}{2}$, то данное выражение можно представить в виде разности синусов. Поэтому

$$1-\sin\alpha=\sin\frac{\pi}{2}-\sin\alpha=2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}+\alpha}{2}=$$
$$=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

Эту задачу можно решить иначе:

$$1-\sin\alpha=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=1-\cos\left(2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)=$$
$$=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

С помощью формул приведения первое из полученных выражений можно преобразовать во второе и наоборот.

● **183.** С помощью формул преобразования суммы тригонометрических функций в произведение разложите на множители выражение:

а) $\sin 3\alpha+\sin\alpha$; в) $\cos 2x+\cos 3x$;
б) $\sin\beta-\sin 5\beta$; г) $\cos y-\cos 3y$.

● **184.** Представьте в виде произведения:

а) $\sin 40°+\sin 16°$; в) $\cos 46°-\cos 74°$;
б) $\sin 20°-\sin 40°$; г) $\cos 15°+\cos 45°$;

д) $\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}$;

е) $\cos\frac{11\pi}{12}+\cos\frac{3\pi}{4}$;

ж) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\cos\alpha$;

з) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$.

● *185.* Представьте в виде произведения:

а) $\sin 12°+\sin 20°$;

б) $\sin 52°-\sin 32°$;

в) $\cos\frac{\pi}{10}-\cos\frac{\pi}{20}$;

г) $\sin\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{9}$;

д) $\sin\alpha-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$;

е) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

186. Представьте в виде произведения выражение:

а) $\sin 15°+\cos 65°$;

б) $\cos 40°-\sin 16°$;

в) $\cos 50°+\sin 80°$;

г) $\sin 40°-\cos 40°$.

187. Представьте в виде произведения:

а) $\cos 18°-\sin 22°$;

б) $\cos 36°+\sin 36°$.

188. Докажите, что:

а) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

б) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

189. С помощью формул, доказанных в предыдущем упражнении, преобразуйте выражение:

а) $\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}\alpha$;

б) $\operatorname{tg}3\beta-\operatorname{tg}\beta$;

в) $\operatorname{ctg}2x+\operatorname{tg}4x$;

г) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;

д) $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{5}-\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5}$;

е) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}$.

190. Представьте в виде произведения тригонометрических функций:

а) $\sin^2 x-\sin^2 y$;

б) $\cos^2 x-\cos^2 y$.

191. Представьте в виде произведения:

а) $\sin x+\cos y$;

б) $\cos x-\sin y$.

192. Докажите, что:

а) $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

б) $\sin\alpha-\cos\alpha=-\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

193. Представьте в виде произведения:

а) $\frac{1}{2}+\cos\alpha$;

б) $\frac{1}{2}-\sin\alpha$;

в) $2\sin\alpha+1$;

г) $1-2\cos\alpha$;

д) $\sqrt{2}+2\cos\alpha$;

е) $2\sin\alpha-\sqrt{3}$.

194. Представьте в виде произведения:

а) $\sin\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\alpha$; в) $1+2\cos\alpha$; г) $\sqrt{3}-2\cos\alpha$.

195. Докажите, что:

а) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 6\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$; б) $\frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{tg} \alpha$.

196. Докажите, что:

а) $\frac{\sin \alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha$; б) $\frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$.

197. Найдите значение выражения:

а) $\frac{\cos 68^\circ - \cos 22^\circ}{\sin 68^\circ - \sin 22^\circ}$; б) $\frac{\sin 130^\circ + \sin 110^\circ}{\cos 130^\circ + \cos 110^\circ}$.

198. Разложите на множители:

а) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$;

б) $\cos 2y - \cos 4y - \cos 6y + \cos 8y$.

199. Представьте в виде произведения выражение

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x.$$

200. Проверьте, что:

а) $\sin 87^\circ - \sin 59^\circ - \sin 93^\circ + \sin 61^\circ = \sin 1^\circ$;

б) $\cos 115^\circ - \cos 35^\circ + \cos 65^\circ + \cos 25^\circ = \sin 5^\circ$.

201. Докажите, что:

а) $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ - \cos 10^\circ = 0$;

б) $\cos 85^\circ + \cos 35^\circ - \cos 25^\circ = 0$.

Упражнения для повторения

202. Докажите, что:

а) $\cos 2\alpha - \sin(\pi + \alpha)\sin(4\pi + \alpha) = \cos^2 \alpha$;

б) $4 \sin \alpha \cos \alpha + \sin(2\alpha - \pi) = \sin 2\alpha$.

203. Упростите выражение:

а) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin(\pi + 2\alpha)} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; б) $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)}{1 + \cos 2\alpha} \operatorname{ctg}(\pi + \alpha)$.

204. Напишите уравнение прямой, которая:

а) проходит через начало координат и точку $A(0{,}6;\ -2{,}7)$;

б) пересекает оси координат в точках $B(0;\ 4)$ и $C(-2{,}5;\ 0)$.

205. Упростите выражение:

а) $\left(\frac{2ab}{a^2 - b^2} + \frac{a - b}{2a + 2b}\right) \cdot \frac{2a}{a + b} + \frac{b}{b - a}$;

б) $\frac{y}{x - y} - \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{x}{(x - y)^2} - \frac{y}{x^2 - y^2}\right)$.

Контрольные вопросы

1. Запишите формулу косинуса разности двух углов. Выведите из нее формулы косинуса суммы, синуса суммы и синуса разности.

2. Напишите формулы синуса и косинуса двойного угла. Проведите доказательство.

3. Напишите формулы преобразования в произведение суммы и разности синусов, суммы и разности косинусов. Проведите доказательство одной из этих формул.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

К параграфу 1

206. Найдите значение выражения:

а) $\sin\alpha - \cos 2\alpha - \cos 3\alpha$ при $\alpha = 30°$;
б) $\sin 2\alpha + \operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{ctg}\alpha$ при $\alpha = 45°$;
в) $\operatorname{tg}(90° - \alpha) + \sin(45° + \alpha) + \cos(180° - 2\alpha)$ при $\alpha = 45°$.

207. Проверьте, что верно неравенство:

а) $\cos 60° + \cos 45° > 1$; б) $\sin 60° + \cos 60° > 1$.

208. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin(15° + \alpha) - \sin\alpha}$, если $\alpha = 30°$;

б) $\dfrac{2\sin\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}$, если $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$.

209. Вычислите:

а) $\operatorname{tg}^2 45° \cos 30° \operatorname{ctg}^2 30°$;
б) $\operatorname{tg}^2 30° + 2\sin 60° - \operatorname{tg} 45° + \cos^2 30°$;
в) $\operatorname{ctg}^2 45° + \cos 60° - \sin^2 60° + \frac{3}{4}\operatorname{ctg}^2 60°$.

210. Докажите, что

$$\cos 30° \operatorname{tg} 60° - 1 = \operatorname{ctg}^2 60° (1 + \sin^2 45°).$$

211. В каких координатных четвертях будет положительным значение выражения:

а) $\operatorname{tg} x \sin x$; б) $\dfrac{\cos x}{\operatorname{ctg} x}$; в) $\sin x \cos x \operatorname{tg} x$?

212. Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt{\sin\varphi}$, если $\varphi = 170°$; в) $\sqrt{\operatorname{tg}\varphi}$, если $\varphi = 230°$;
б) $\sqrt{\cos\varphi}$, если $\varphi = 160°$; г) $\sqrt{\operatorname{ctg}\varphi}$, если $\varphi = 340°$?

213*. Углом какой четверти является угол α, если:

а) $|\sin\alpha| = \sin\alpha$; в) $|\operatorname{tg}\alpha| = \operatorname{tg}\alpha$;
б) $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$; г) $|\operatorname{ctg}\alpha| = -\operatorname{ctg}\alpha$?

214*. Запишите общую формулу всех углов α, для которых:

а) $\sin\alpha = 1$; в) $\sin\alpha = -1$; д) $\cos\alpha = 1$;
б) $\sin\alpha = 0$; г) $\cos\alpha = 0$; е) $\cos\alpha = -1$.

215*. Укажите наибольшее и наименьшее значения выражения:

а) $1+2\sin\alpha$; в) $|\sin\alpha|$; д) $3+4\sin\alpha$;

б) $1-3\cos\alpha$; г) $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$; е) $2\cos^2\alpha$.

216. Вычислите:

а) $3\sin(-90°)+2\cos 0°-3\sin(-270°)$;

б) $2\cos(-270°)-\frac{1}{2}\operatorname{tg}180°-\sin(-90°)$.

217. Найдите значение выражения $\sin\alpha+\cos\alpha$, если:

а) $\alpha=-45°$; в) $\alpha=-360°$; д) $\alpha=-420°$;
б) $\alpha=-90°$; г) $\alpha=-180°$; е) $\alpha=-1710°$.

218. Определите знак выражения:

а) $\sin\frac{5\pi}{6}\cos\frac{2\pi}{3}$; в) $\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{4}$;

б) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$; г) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$.

219. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен $\frac{\pi}{9}$. Найдите углы при основании.

220. Углы треугольника пропорциональны числам 1, 2 и 3. Найдите их радианную меру.

221. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}+\cos(-\pi)+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{3\pi}{2}}$; в) $\dfrac{5\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\frac{3\pi}{2}}$;

б) $\dfrac{3\sin\frac{\pi}{6}+2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{5\operatorname{tg}0+6\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$; г) $\dfrac{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)-1}{\sin\frac{3\pi}{2}+\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}$.

222. Верно ли, что:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{6}$;

б) $\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}<1$?

К параграфу 2

223. Могут ли синус и косинус некоторого угла равняться соответственно $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, где a и b — некоторые числа, не равные одновременно нулю?

224. Могут ли тангенс и котангенс некоторого угла равняться соответственно $a+\frac{1}{a}$ и $\frac{a}{a^2+1}$, где a — число, не равное нулю?

225. Упростите выражение:

а) $\frac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha}$;

б) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha$;

в) $\frac{1+\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}^2\gamma}{1+\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}^2\gamma}$;

г) $\frac{\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}^2\gamma}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2\gamma-1}{\operatorname{ctg}\gamma}$.

226. Докажите, что при всех допустимых значениях α данное выражение принимает одно и то же значение:

а) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

б) $\frac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}+\sin\alpha$;

в) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha$;

г) $\frac{1}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{1}{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

227. Упростите выражение:

а) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)$;

б) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}$;

в) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha$;

г) $\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$.

228. Докажите тождество:

а) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}^6\alpha$;

б) $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{ctg}\beta}=\sin^2\beta$;

в) $\frac{\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}=\frac{\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}^2\beta-1}$;

г) $\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha$.

229. Докажите тождество:

а) $\cos^4\gamma-\sin^4\gamma=1-2\sin^2\gamma$;

б) $\frac{1-2\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha$;

в) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}=\cos\alpha$;

г) $\frac{\operatorname{tg}^2\gamma+1}{\operatorname{tg}^2\gamma-1}=\frac{1}{\sin^2\gamma-\cos^2\gamma}$.

230*. Докажите, что значение выражения

$$(a\sin\alpha+b)(a\sin\alpha-b)+(a\cos\alpha+b)(a\cos\alpha-b)$$

не зависит от α.

231*. Упростите выражение:

а) $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}+\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$;

б) $\left(\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\right)$.

232*. Выразите:

а) $\sin^4\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ через $\cos\alpha$;

б) $\cos^4\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$ через $\sin\alpha$.

233. Найдите значение дроби $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$.

234*. Найдите значение выражения $\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$, если $\sin\alpha=\frac{1}{3}$.

235*. Зная, что $\sin\alpha+\cos\alpha=a$, найдите:

а) $\sin\alpha\cos\alpha$; б) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$.

236*. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=m$, найдите:

а) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha$.

237*. Найдите значение дроби $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$, если известно, что $\sin x\cos x=0{,}4$.

238*. Докажите, что дробь $\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$ не может принимать отрицательных значений.

239. Найдите значение выражения $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha$, если:

а) $\alpha=\frac{7\pi}{6}$; б) $\alpha=-120°$.

240. Докажите, что:

а) $\cos(60°-\alpha)=\sin(30°+\alpha)$;

б) $\operatorname{ctg}\left(80°-\frac{\alpha}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(10°+\frac{\alpha}{2}\right)$;

в) $\sin(30°-2\alpha)=\cos(60°+2\alpha)$.

241. Тангенс острого угла параллелограмма равен 0,7. Найдите тангенс тупого угла этого параллелограмма.

242. Тангенс внешнего угла прямоугольного треугольника, не смежного с прямым углом, равен k. Найдите тангенсы острых углов треугольника.

243. Косинус одного из смежных углов равен $-\frac{3}{5}$. Найдите синус другого угла.

244. Докажите, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то:

а) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\gamma$;
б) $\cos(\alpha+\beta)=-\cos\gamma$;
в) $\sin 2(\alpha+\beta)=-\sin 2\gamma$;
г) $\cos 2(\alpha+\beta)=\cos 2\gamma$.

245*. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{tg} 15° \operatorname{tg} 30° \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 60° \operatorname{tg} 75°$;
б) $\operatorname{ctg} 18° \operatorname{ctg} 36° \operatorname{ctg} 54° \operatorname{ctg} 72°$.

246. Найдите:

а) $\operatorname{tg}(270°-\alpha)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{5}$;
б) $\sin(180°+\alpha)$, если $\cos\alpha=0{,}8$ и $0<\alpha<90°$;
в) $\operatorname{ctg}(360°-\alpha)$, если $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ и $90°<\alpha<180°$;
г) $\sin(270°+\alpha)$, если $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$ и $180°<\alpha<270°$.

247. Найдите угол α, если:

а) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ и $90°<\alpha<180°$;
б) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $180°<\alpha<270°$;
в) $\operatorname{tg}\alpha=-1$ и $90°<\alpha<180°$;
г) $\operatorname{ctg}\alpha=-\sqrt{3}$ и $270°<\alpha<360°$.

248*. Докажите, что $\operatorname{tg} 1° \operatorname{tg} 2° \operatorname{tg} 3° \ldots \operatorname{tg} 88° \operatorname{tg} 89°=1$.

249. Упростите выражение:

а) $\left(\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2+\left(\cos(2\pi-\alpha)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2$;
б) $\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2-\left(\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)+\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2$.

250. Докажите тождество

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)}{\cos(2\pi-\alpha)}+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin(\pi-\alpha)+$$
$$+\cos(\pi+\alpha)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

251. Упростите выражение:

а) $\sin 160° \cos 110°+\sin 250° \cos 340°+\operatorname{tg} 110° \operatorname{tg} 340°$;
б) $\operatorname{tg} 18° \operatorname{tg} 288°+\sin 32° \sin 148°-\sin 302° \sin 122°$.

252. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\cos^2(\pi-\alpha)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)\cos(2\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}=\cos^2\alpha$;

б) $\dfrac{\sin^3\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\cos(2\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}^3\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos^3\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}=\cos\alpha$.

К параграфу 3

253. Упростите:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cos\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\alpha$;

б) $\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)+\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)$;

в) $\cos(36^\circ+\alpha)\cos(54^\circ+\alpha)-\sin(36^\circ+\alpha)\sin(54^\circ+\alpha)$;

г) $\sin\beta\cos(\alpha+\beta)-\cos\beta\sin(\alpha+\beta)$.

254*. Известно, что $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и α — угол I четверти. Вычислите:

а) $\cos^2(45^\circ-\alpha)$;

б) $\cos^2(60^\circ+\alpha)$;

в) $\sin^2 60^\circ+\sin(30^\circ+\alpha)\sin(30^\circ-\alpha)$.

255*. Упростите:

а) $\cos^2\alpha+\cos^2(60^\circ+\alpha)+\cos^2(60^\circ-\alpha)$;

б) $\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}$;

в) $\sin^2\alpha+\sin^2(120^\circ+\alpha)+\sin^2(120^\circ-\alpha)$;

г) $\frac{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha-\sin\beta}$.

256. Найдите $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$, если известно, что $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{7}{25}$, где α и β — углы I четверти.

257. Найдите $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, если $\sin\alpha=-\frac{8}{17}$ и α — угол III четверти.

258*. Докажите тождество:

а) $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)\,\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}^2\alpha-\mathrm{tg}^2\beta}{1-\mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\beta}$;

б) $\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{ctg}\,\alpha}$;

в) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$;

г) $\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)}+\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}(\alpha-\beta)}=2$.

259. Известно, что $\mathrm{tg}(45^\circ+\alpha)=a$. Найдите:
а) $\mathrm{tg}\,\alpha$; б) $\mathrm{ctg}\,\alpha$.

260. Упростите выражение:

а) $\frac{1+\mathrm{tg}(45^\circ-\alpha)}{1-\mathrm{tg}(45^\circ-\alpha)}$; б) $\frac{1+\mathrm{ctg}(45^\circ-\alpha)}{\mathrm{tg}(45^\circ+\alpha)-1}$;

в) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$;

г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$.

261. Докажите тождество:

а) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$; б) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$.

262. Выведите формулы котангенса суммы и котангенса разности:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta},\quad \operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}.$$

263*. Зная, что α и β — острые углы и $\sin\alpha=0{,}1\sqrt{2}$, $\sin\beta=0{,}6$, докажите, что $\alpha+\beta=45°$.

264*. Докажите, что $\alpha+\beta=45°$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{11}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{3}{8}$, α и β — острые углы.

265*. Докажите, что $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$, $\operatorname{tg}\beta=7$, α и β — положительные углы, меньшие $\frac{\pi}{2}$.

266*. Известно, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-3$. Вычислите:

а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $\operatorname{tg}\alpha$; г) $\operatorname{ctg}\alpha$.

267*. Найдите значение $\cos 4\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

268*. Докажите тождество:

а) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$; в) $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}=2$;

б) $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$; г) $\frac{\cos\alpha-\cos 3\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

269. Выразите:

а) $\sin 4\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$; б) $\cos 4\alpha$ через $\cos\alpha$.

270. Найдите значение выражения:

а) $4\sin 15°\cos 15°(\cos^2 15°-\sin^2 15°)$;

б) $4\sin^2 75°\cos^2 75°-(\sin^2 75°-\cos^2 75°)^2$;

в) $1-6\sin^2\frac{\pi}{12}\cos^2\frac{\pi}{12}$;

г) $\sin\frac{\pi}{16}\cos^3\frac{\pi}{16}-\sin^3\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16}$.

271*. Каково соотношение между a и b, если $a=\sin\alpha+\cos\alpha$, $b=\cos\alpha-\sin\alpha$?

272*. Если $\cos x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$, то верно равенство $\cos 2x=2\cos x$. Докажите это.

273. Найдите значение выражения $\frac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha}$, если $\cos\alpha=-\frac{1}{4}$.

274*. Докажите тождество:

а) $\cos 2\alpha - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \sin 2\alpha \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

б) $\left(\frac{2}{1+\operatorname{tg}\alpha}+\operatorname{tg} 2\alpha\right)\left(\cos^2\alpha-\frac{1}{2}\right)=\cos^2\alpha$;

в) $\sin^4\beta+\cos^4\beta=\frac{3+\cos 4\beta}{4}$.

275*. Упростите:

а) $\frac{1}{1+\operatorname{ctg}\alpha}-\frac{1}{1-\operatorname{ctg}\alpha}$;

б) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$;

в) $\frac{\operatorname{tg}^2(45^\circ+\alpha)-1}{\operatorname{tg}^2(45^\circ+\alpha)+1}$;

г) $(\operatorname{tg} 2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)$;

д) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$;

е) $\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg} 2\alpha+4\operatorname{ctg} 4\alpha$.

276. Воспользовавшись формулами преобразования суммы тригонометрических функций в произведение, преобразуйте выражение:

а) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$; б) $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}$; в) $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$.

277*. Преобразуйте в произведение:

а) $\cos 2\alpha+\cos 5\alpha+\cos\alpha$;

б) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$.

278. Представьте в виде произведения:

а) $\sin 19^\circ+\sin 25^\circ+\sin 31^\circ$;

б) $\sin 16^\circ+\sin 24^\circ+\sin 40^\circ$.

279. Покажите, что:

а) $\frac{\sin 22^\circ+\sin 8^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{\sin 12^\circ-\sin 2^\circ}{\cos 70^\circ-\cos 80^\circ}$;

б) $\frac{\cos 20^\circ-\cos 50^\circ}{\cos 31^\circ+\sin 11^\circ}=\frac{\sin 80^\circ-\sin 70^\circ}{\sin 29^\circ-\sin 19^\circ}$.

280. Упростите выражение:

а) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$; б) $\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}$.

281*. Докажите, что:

а) $\sin\alpha+\cos\alpha-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{6}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=$
$=(\sqrt{3}-1)\sin\alpha$.

282*. Докажите, что при любых α и β

$$\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$$

283*. Преобразуйте в произведение разность $\sqrt{1+\cos 2\alpha} - \sqrt{1-\cos 2\alpha}$, где $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

284*. Докажите тождество

$$\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1}=2\cos\alpha.$$

285. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\cos\alpha+2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\sin\alpha+2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}$;   б) $\dfrac{\sin 4\alpha+2\cos 3\alpha-\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha-2\sin 3\alpha-\cos 2\alpha}$.

286. Докажите тождество:

а) $\dfrac{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha-\cos 7\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

б) $\dfrac{\cos\alpha-\cos 2\alpha-\cos 4\alpha+\cos 5\alpha}{\sin\alpha-\sin 2\alpha-\sin 4\alpha+\sin 5\alpha}=\operatorname{ctg} 3\alpha$.

287*. Докажите, что если A, B и C — углы треугольника, то

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

ОТВЕТЫ

9. а) 2,5; б) 1,5; в) 0; г) $3\sqrt{3}$; д) 6; е) $3\sqrt{3}$. **10.** а) 1; б) $\sqrt{2}-2\sqrt{3}$; в) 7; г) $\sqrt{3}$. **17.** а) -2; б) 0; в) 1. **19.** а) 1; б) $\sqrt{2}$; в) 1; г) -1. **20.** а) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) -1. **21.** а) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$. **22.** $a-b$. **24.** а) 3; б) 10. **38.** $-0{,}06$. **51.** а) 3; б) $\frac{3-\sqrt{2}}{2}$; в) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$; г) $-5+\sqrt{2}$. **52.** а) $1\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{3}{8}$. **53.** а) 11; б) 0; в) $-2\frac{3}{4}$; г) $-3\frac{1}{4}$. **55.** а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$. **57.** а) $\frac{4}{5}(a-3)$; б) $2(3-x)$. **58.** а) $(-\infty; 0)$ и $(0{,}6; +\infty)$; б) $\left[-\frac{2}{7}; 0\right]$. **59.** а) $\sin^2\alpha$; б) $-\cos^2\alpha$; в) $2\cos^2\alpha$; г) $\cos^2\alpha$; д) $\cos^2\alpha$; е) $-\sin^2\alpha$. **60.** а) 0; б) $\sin^2\alpha$. **61.** а) $\sin^2\alpha$; б) $-\sin^2\alpha$; в) $-\cos^2\alpha$; г) 1; д) $-\operatorname{ctg}^2\alpha$; е) $\operatorname{tg}^2\alpha$. **62.** а) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; б) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$. **63.** а) $\cos\alpha$; б) $\sin\alpha$; в) $\cos\alpha$; г) 0; д) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; е) $-\operatorname{ctg}^2\alpha$. **64.** а) 0,8; б) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$; в) $-\frac{8}{15}$; г) $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **65.** а) 0,8; б) $\frac{\sqrt{15}}{4}$; в) $\frac{\sqrt{10}}{10}$; г) $\frac{5}{12}$. **68.** а) $-\frac{9}{40}$; б) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$. **69.** а) $-1\frac{1}{3}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **70.** а) $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha=1\frac{1}{3}$; б) $\sin\alpha=\frac{15}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha=1\frac{7}{8}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{8}{15}$; в) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\sqrt{3}$; г) $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\cos\alpha=\frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{2}{5}$. **71.** а) $\cos\beta=-\frac{9}{41}$, $\operatorname{tg}\beta=-4\frac{4}{9}$, $\operatorname{ctg}\beta=-\frac{9}{40}$; б) $\sin\beta=-\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\beta=-\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\beta=-1\frac{1}{3}$; в) $\sin\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{ctg}\beta=1$; г) $\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$. **72.** а) $\cos\alpha\approx-0{,}78$, $\operatorname{tg}\alpha\approx-0{,}79$, $\operatorname{ctg}\alpha\approx-1{,}3$; б) $\sin\alpha\approx-0{,}90$, $\cos\alpha\approx0{,}43$, $\operatorname{ctg}\alpha\approx-0{,}48$; в) $\sin\alpha\approx-0{,}97$, $\operatorname{tg}\alpha\approx4{,}2$, $\operatorname{ctg}\alpha\approx0{,}24$; г) $\sin\alpha\approx0{,}41$, $\cos\alpha\approx0{,}91$, $\operatorname{tg}\alpha\approx0{,}45$. **73.** а) $\cos\alpha=\frac{15}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{15}$, $\operatorname{ctg}\alpha=1\frac{7}{8}$ или $\cos\alpha=-\frac{15}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{8}{15}$,

$\operatorname{ctg}\alpha=-1\frac{7}{8}$; б) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\sqrt{3}$ или $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{3}$. **75.** а) b; б) $-ab$. **76.** (0; 0), (8; 80). **77.** а) $-\operatorname{tg}^2\alpha$; б) $\operatorname{ctg}^2\alpha$; в) $\cos^2\alpha$; г) $\frac{1}{2}\sin\alpha$. **78.** а) $\frac{1}{\sin\beta}$; б) $-\frac{2}{\cos^2\alpha}$; в) $\operatorname{ctg}\gamma$; г) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; д) $-\sin^2\beta$; е) $-\sin^2\alpha$. **79.** а) $\frac{1}{\cos\alpha}$; б) $\frac{2}{\sin^2\alpha}$; в) $\sin^2\beta$; г) $\operatorname{tg}\beta$. **82.** а) 0; б) -1; в) $-\cos^2\alpha$; г) $\frac{1}{\cos\alpha}$. **83.** а) $-2\cos\alpha$; б) $\cos x$; в) $-\cos^2\beta$; г) $-\operatorname{tg}x$. **84.** а) $\frac{2}{\cos x}$; б) $\frac{1}{\cos\alpha}$; в) $\sin^2\varphi$; г) 1. **85.** а) 2; б) 1; в) 4; г) 4. **86.** $-0{,}18$. **87.** 3,29. **92.** а) 0,51; б) 0,2. **93.** -16. **95.** 15 дм и 20 дм. **96.** 16 см и 63 см. **100.** а) $-\sin 0{,}2\pi$; б) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{5}$; в) $-\cos 0{,}1\pi$; г) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$. **101.** а) $-\operatorname{tg}43°$; б) $-\sin 2°$; в) $-\sin 40°$; г) $\sin 10°$. **103.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $-\sqrt{3}$; г) $-\frac{1}{2}$; д) -1; е) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **104.** а) $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) -1; г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **105.** а) $-\cos\alpha$; б) $-\cos\alpha$; в) $\operatorname{ctg}\alpha$; г) $\operatorname{ctg}\alpha$. **106.** а) $\cos\alpha$; б) $-\sin\alpha$; в) $\operatorname{tg}\alpha$. **110.** а) 0; б) $2\cos\alpha$. **111.** а) $\operatorname{ctg}\alpha$; б) $-\cos\alpha$; в) $\operatorname{ctg}\alpha$; г) $-\cos\alpha$. **112.** а) 1; б) 1. **113.** а) 1; б) 1. **118.** 60 км/ч и 90 км/ч. **119.** 70 км/ч. **123.** а) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$. **124.** а) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **126.** а) $\sin\alpha$; б) $-\cos\alpha$; в) $\cos\alpha$; г) $-\sin\alpha$. **127.** а) $\sin\alpha\sin\beta$; б) $\sin\beta\cos\alpha$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$. **130.** а) $\cos\beta$; б) $\sin 2\gamma$. **131.** а) 0; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) $\frac{1}{2}$. **132.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) 0. **133.** а) $\sin 2\alpha$; б) 0. **135.** а) $2\sin\beta\cos\alpha$; б) $-\sin\alpha$. **137.** а) 1; б) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$. **138.** а) 1; б) $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$. **139.** а) $\frac{77}{85}$; б) $\frac{36}{85}$; в) $\frac{84}{85}$. **140.** 1. **141.** а) $-\frac{84}{85}$; б) $-\frac{36}{85}$; в) $\frac{77}{85}$; г) $\frac{13}{85}$. **143.** $-\frac{16}{65}$. **144.** $\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}$. **145.** $2\frac{3}{8}$. **146.** а) $2-\sqrt{3}$; б) $2+\sqrt{3}$. **148.** а) 1; б) $\frac{1}{7}$. **152.** а) $[-8; -1]$; б) $(-\infty; 0]$ и $\left[3\frac{1}{4}; +\infty\right)$. **153.** За 45 ч и 36 ч. **154.** а) $2\cos\alpha$; б) $\operatorname{ctg}\alpha$; в) $\sin\beta$; г) $\cos^2\alpha$; д) $\sin^2\beta$; е) $-\sin\alpha$. **155.** б) $2\sin 50°$; г) $\cos 18°$. **157.** а) $-\frac{120}{169}$; б) $\frac{119}{169}$; в) $-1\frac{1}{119}$. **158.** а) 0,96; б) 0,28; в) $3\frac{3}{7}$. **159.** 0,96 и $-0{,}28$. **160.** а) 0,96; б) $-0{,}28$; в) $-3\frac{3}{7}$. **163.** $\sin\alpha=\frac{720}{1681}$, $\cos\alpha=\frac{1519}{1681}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{720}{1519}$. **164.** а) $2\sin\alpha$; б) -1; в) $\cos 2\alpha$; г) 2. **165.** а) 1; б) $2\operatorname{tg}\beta$. **166.** в) $-\frac{1}{4}$; е) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **167.** в) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$.

168. а) $-0{,}5$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $-\sqrt{3}$. **169.** г) $\frac{1}{2}\sin\alpha$; д) $-2\sin\frac{\alpha}{2}$; е) $-2\operatorname{tg}\alpha$. **172.** а) $-\sin 2\alpha$; б) 1; в) 0,5; г) $4\sin\beta$. **173.** а) $\sin\alpha$; б) $\operatorname{tg}2\alpha$; в) $\operatorname{tg}2\alpha$; г) $4\cos\alpha$. **174.** в) $\cos\alpha$; г) $\operatorname{tg}\alpha$; д) $\sin 2\alpha$; е) $\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$; ж) $\operatorname{tg}\alpha$; з) $\cos^2\alpha$. **175.** а) $\operatorname{tg}\beta$; б) $\sin\beta$; в) $\sin 2\beta$; г) $2\cos 2\beta$; д) $\sin\beta$; е) $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. **177.** а) $\operatorname{ctg}^2\varphi$; б) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)$. **178.** а) Существует; б) не существует. **180.** а) $\cos\alpha\cos\beta$; б) $\frac{1}{\sin\alpha\sin\beta}$. **181.** а) $(-\infty;\ 1]$ и $[4;\ +\infty)$. **182.** За 66 ч и 55 ч. **184.** з) $\sqrt{3}\sin\alpha$. **185.** г) $2\sin\frac{\pi}{36}\cos\frac{5\pi}{36}$; д) $-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$; е) $-\sqrt{2}\sin\alpha$. **186.** г) $-\sqrt{2}\sin 5°$. **187.** а) $2\sin 25°\cos 47°$; б) $\sqrt{2}\cos 9°$. **189.** г) 2; д) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{2\pi}{5}}$; е) $-\frac{\sqrt{2}}{2\cos^2\frac{3\pi}{8}}$. **190.** а) $\sin(x+y)\sin(x-y)$; б) $-\sin(x+y)\sin(x-y)$. **191.** а) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x+y}{2}\right)$; б) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x-y}{2}\right)$. **194.** а) $2\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$, б) $2\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)$; в) $4\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)$; г) $-4\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)$. **197.** а) -1; б) $-\sqrt{3}$. **198.** а) $4\sin\frac{5x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2}$; б) $-4\cos 5y\sin 2y\sin y$. **199.** $4\cos\frac{5x}{2}\cos x\cos\frac{x}{2}$. **203.** а) 1; б) -1. **204.** а) $y=-4{,}5x$; б) $y=1{,}6x+4$. **205.** а) 1; б) -1. **206.** а) 0; б) 0; в) 2. **208.** а) $\sqrt{6}+\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}$. **209.** а) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{12\sqrt{3}+1}{12}$; в) 1. **216.** а) -4; б) 1. **217.** а) 0; б) -1; в) 1; г) -1; д) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$; е) 1. **219.** $\frac{4\pi}{9}$ и $\frac{4\pi}{9}$. **220.** $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$. **221.** а) 1; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{5\sqrt{3}-2}{2}$; г) 1. **223.** Да. **224.** Да. **225.** а) $-\operatorname{ctg}^6\alpha$; б) $\cos^2\alpha$; в) $\operatorname{tg}^2\gamma$; г) 1. **227.** а) $\operatorname{tg}\alpha$; б) $2\operatorname{tg}^2\alpha$; в) 1; г) 1. **231.** а) $\frac{2}{\cos\alpha}$ или $-\frac{2}{\cos\alpha}$, б) 4 или -4. **232.** а) $\cos^4\alpha$; б) $\sin^4\alpha$. **233.** 2. **234.** $1\frac{2}{7}$. **235.** а) $\frac{a^2-1}{2}$; б) $\frac{a(3-a^2)}{2}$. **236.** а) m^2-2; б) $m(m^2-3)$. **237.** 3 или -3. **239.** а) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$; б) 0. **241.** $-0{,}7$. **242.** $-k$; $-\frac{1}{k}$. **243.** $\frac{4}{5}$. **246.** а) $1\frac{2}{3}$; б) $-0{,}6$; в) $\sqrt{3}$; г) $\frac{3}{5}$. **247.** а) 150°; б) 210°; в) 135°; г) 330°. **249.** а) 4; б) 4. **251.** а) 0; б) 0. **253.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\cos\beta$; в) $\sin 2\alpha$; г) $-\sin\alpha$. **254.** а) 0,98; б) $0{,}43-0{,}24\sqrt{3}$; в) 0,64. **255.** а) 1,5; б) $\sin\alpha-\sin\beta$; в) 1,5;

г) $\cos\alpha+\sin\beta$. **256.** $-1\frac{1}{3}$. **257.** $\frac{7}{23}$. **259.** а) $\frac{a-1}{a+1}$; б) $\frac{a+1}{a-1}$. **260.** а) $\operatorname{ctg}\alpha$; б) $\operatorname{ctg}\alpha$; в) $1+\cos\alpha$; г) $1+\cos\alpha$. **266.** а) $-0{,}6$; б) $-0{,}8$; в) $0{,}75$; г) $1\frac{1}{3}$. **267.** $7-4\sqrt{3}$. **269.** а) $4\sin\alpha\cos^3\alpha-4\sin^3\alpha\cos\alpha$; б) $8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$. **270.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-0{,}5$; в) $\frac{5}{8}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{8}$. **271.** $a^2+b^2=2$. **273.** $\frac{7}{8}$. **275.** а) $\operatorname{tg}2\alpha$; б) $\cos 2\alpha$; в) $\sin 2\alpha$; г) $2\operatorname{tg}^2\alpha$; д) $\cos 2\alpha$; е) $\operatorname{ctg}\alpha$. **276.** а) $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$; б) $-\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}$; в) $\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ **277.** а) $4\cos 2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{3\alpha}{2}\right)$; б) $4\sin 2\alpha\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$. **278.** а) $4\sin 25^\circ\cos 33^\circ\cos 27^\circ$; б) $4\sin 20^\circ\cos 12^\circ\cos 8^\circ$. **280.** а) $\operatorname{ctg}\alpha$; б) $-\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$. **285.** а) $\operatorname{ctg}2\alpha$; б) $-\operatorname{ctg}3\alpha$.

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ